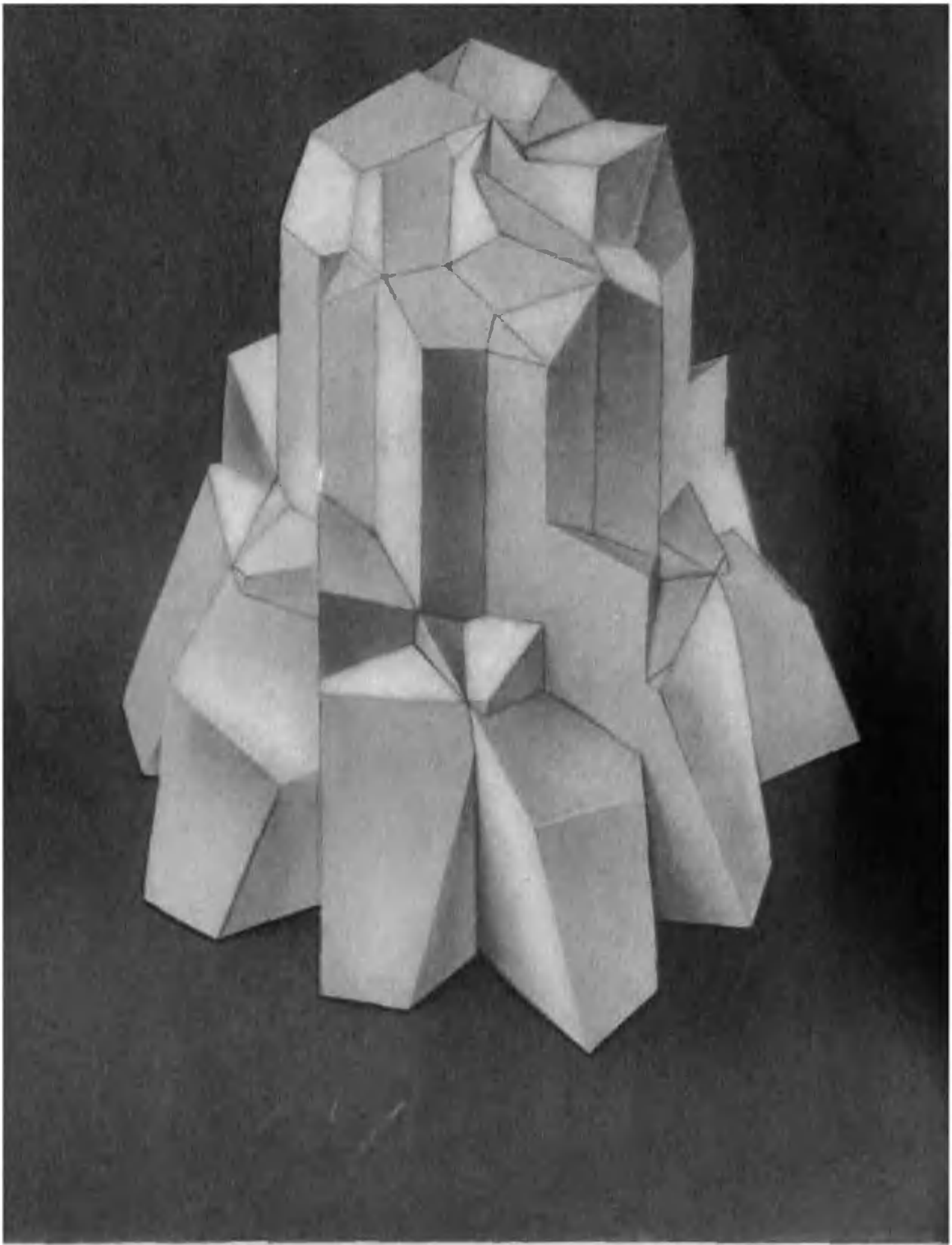
ISSN 0130-2221

Квант

3
1979

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Этот многогранник, сконструированный и изготовленный В. Гамаюновым, определенным образом связан с равногранно полуправильным шестидесятигранником («Квант», 1976, № 1).
О том, как построить его развертку, рассказано на с. 50

Основан в 1970 году

Квант

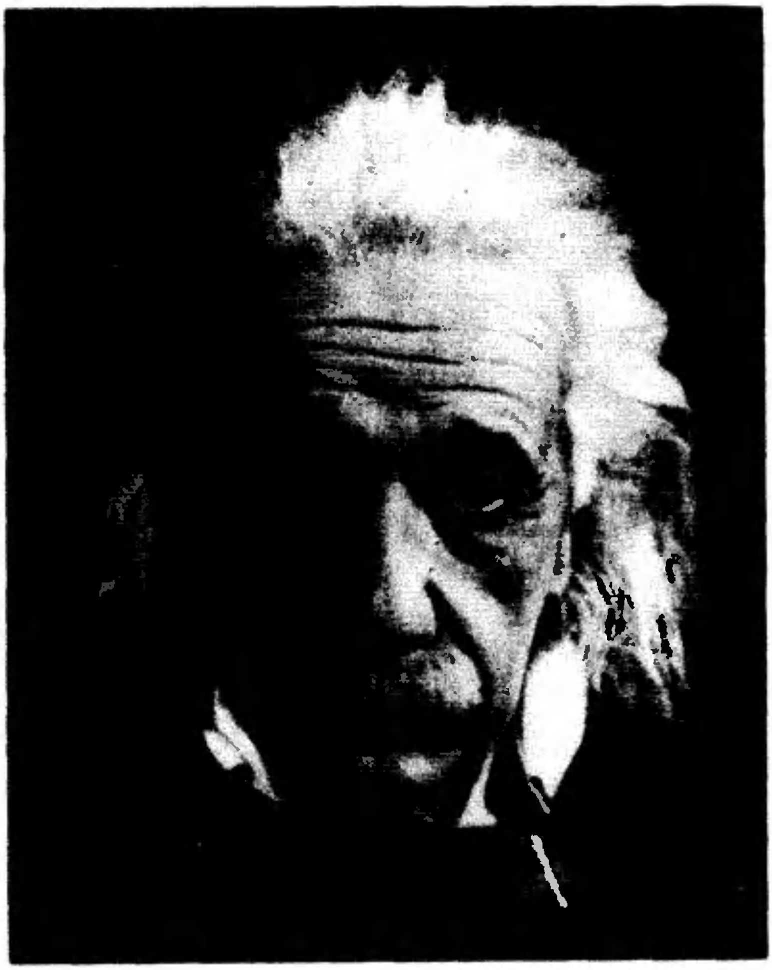
3
1979

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство „Наука" Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки вы видите рисунок М. Эшера «Бельведер». В его основе лежит идея «перепутанного куба», двумерное изображение которого не отличается от обычного



14 марта исполняется 100 лет со дня рождения Альберта Эйнштейна, которого В. И. Ленин отнес к великим преобразователям естествознания. С именем Эйнштейна связано начало революции в физике, которой ознаменовался XX век. Идеи созданной им теории относительности в корне изменили взгляды на физические явления, происходящие как в микромире, так и во всей Вселенной. Философский смысл этих открытий, их диалектический характер полностью раскрылись лишь в наши дни.

Эйнштейн внес свой вклад во многие разделы физики. Он был одним из создателей современных квантовых представлений о природе излучения и заложил основы теории лазеров. Его теория броуновского движения привела к окончательному утверждению молекулярной теории строения веществ.

Альберт Эйнштейн не был кабинетным ученым, равнодушным к судьбе человечества. Он необычайно остро воспринимал все, что происходило вокруг него. Покинув в 1933 г. нацистскую Германию, он активно выступал против войны, за взаимопонимание между народами.

Эйнштейн был одним из первых, кто увидел опасность развития ядерного оружия. В своих выступлениях и статьях он стремился сделать все, что было в его силах, чтобы остановить гонку вооружений и прекратить проповедь войны. Когда он умер, на столике возле его больничной кровати нашли неоконченную рукопись, посвященную проблемам разоружения и всеобщего мира.

В этом номере мы помещаем материалы, цель которых — представить нашим читателям Альберта Эйнштейна и как ученого, и как человека.

Обращение в защиту мира

Советский Союз всегда был в передовых рядах борцов за всеобщее разоружение, за прочный мир между народами. Наша страна создала атомное оружие не для нападения или шантажа. Его создание лишило американских империалистов каких-либо надежд на монополию в области атомного оружия, привело к установлению стратегического равновесия сил и открыло человечеству путь к переговорам о запрещении испытаний атомных и водородных бомб. Советский Союз настаивает на прекращении производства и совершенствования всех видов оружия массового уничтожения. В этой борьбе нас поддерживает все прогрессивное человечество.

Альберт Эйнштейн активно боролся за мир. Он стремился привлечь как можно больше научных работников в ряды сторонников мира. В декабре 1954 г. по английскому радио было передано обращение к ученым всего мира, подписанное одиннадцатью выдающимися учеными. Одним из них был Альберт Эйнштейн.

В обращении, которое не утратило актуальности и сегодня, в частности, говорилось:

...В трагической ситуации, перед которой находится человечество, мы считаем, что ученым следует собраться на конференцию, чтобы оценить опасность, возникшую в результате развития оружия массового уничтожения, и обсудить возможность принятия решения в духе предложенной ниже резолюции...

Мы должны научиться мыслить по-новому. Нам нужно перестать спрашивать себя, какие шаги обеспечат военную победу той группировке, которую мы предпочитаем, потому что таких шагов уже нет; нам нужно задавать себе другой вопрос: какие шаги необходимо предпринять, чтобы избежать военной конфронтации, результатом которой будет неизбежная катастрофа для всех сторон.

Широкая общественность и даже многие люди, занимающие авторитетные посты, не поняли, с чем была бы связана ядерная война. Общественность по-прежнему думает в терминах уничтожения городов. Конечно, новые бомбы более мощны, чем старые, и в то время как одна атомная бомба смогла стереть с лица Земли Хиросиму, одна водородная бомба сможет уничтожить такие крупные города как Лондон, Нью-Йорк, Москва.

Из достоверных источников известно, что можно изготовить бомбу, в 2500 раз более мощную, чем та, которая уничтожила Хиросиму. Такая бомба, если она взрывается около земли или под водой, посылает радиоактивные частицы в верхние слои атмосферы. Они постепенно опускаются и достигают поверхности Земли в форме смертоносной пыли или дождя. Эта пыль и поразила японских рыбаков и их улов.

Никто не знает, как будут распространяться смертоносные радиоактивные частицы, но авторитетные специалисты утверждают, что война с применением водородных бомб может положить конец существованию человечества. Имеется опасение, что, если будет использовано много водородных бомб, наступит всеобщая смерть, скоротечная для меньшинства, медленные мучения, болезни и неизбежная гибель — для большинства.

Много предостережений было высказано выдающимися учеными и специалистами по военной стратегии. Никто из них не утверждает, что наихудшие результаты неизбежны. Но они утверждают, что эти результаты возможны и что никто не может быть уверен, что они не будут реализованы. Мы до сих пор не обнаружили, что эти точки зрения экспертов зависят от их политических взглядов или предрассудков. Они зависят, как показали наши исследования, от широты познаний данного эксперта. Мы убедились, что те, кто знает больше всего, наиболее мрачно настроены.

Проблема, которую мы ставим перед вами, выглядит так: положим ли мы конец человечеству или же человечество откажется от войны?

Мы предлагаем будущему конгрессу и, через него, всем ученым мира и мировой общественности подписаться под следующей резолюцией:

«В связи с тем фактом, что в любой будущей войне ядерное оружие обязательно будет использовано и что такое оружие угрожает самому существованию человечества, мы настойчиво призываем правительства всех стран мира понять и публично признать, что их цели не могут быть осуществлены с помощью мировой войны, и мы настойчиво призываем их найти мирные средства для решения всех спорных вопросов между ними».

Я. Смородинский

Альберт Эйнштейн (1879—1979)

Сто лет назад в немецком городе Ульме появился на свет ребенок, которому суждено было совершить одно из самых замечательных открытий в истории естествознания — ему суждено было стать отцом теории относительности: 14 марта 1879 года родился Альберт Эйнштейн.

Не было в истории науки другой теории, которая выдержала столько споров, рассеяла такое упорное недоверие, как теория относительности. Очень немногие современники Эйнштейна смогли сразу принять новое учение — так оно отличалось от всего, что знали физики девятнадцатого века. И прошло немало времени, прежде чем теория относительности стала основой всей науки о природе.

Но слава Эйнштейна основывается не только на одном этом открытии. Когда в 1922 г. ему присуждалась Нобелевская премия, теория относительности еще не была признана всеми, и премией было увенчано открытие законов фотоэффекта. Нам сейчас трудно понять нерешительность Нобелевского комитета, но и работа о фотоэффекте открыла новую эпоху физики. Эта работа доказывала существование кванта света —фотона.

Эйнштейна всегда интересовали самые общие вопросы физики, он пытался понять, как устроен наш мир, старался найти глобальные законы, которые им управляют. «Меня выводят из себя ученые, — говорил он, — которые берут доску, выбирают в ней самое тонкое место и уже там, где сверлить легко, проделывают очень много дырочек». Сам Эйнштейн тратил свои силы только там, где сверлить было трудно.

Попробуем рассказать о его работах и о разных эпизодах из жизни великого физика в серии коротких, не очень связанных между собой тринадцати очерков.

I. Первые работы

Свою первую работу Эйнштейн напечатал в 1901 г. Копии ее он посылал в разные лаборатории, пытаясь устроиться на работу после окончания Цюрихского политехникума. Эти попытки оказались безуспешными. (Через много лет те, кто не откликнулся на его просьбы, принимали его с величайшими почестями.) Лишь в июне 1902 г., через два года после окончания политехникума, Эйнштейн смог получить место технического эксперта в Швейцарском патентном бюро.

К началу 1905 г. у Эйнштейна было уже шесть опубликованных работ. Сам Эйнштейн впоследствии невысоко оценивал свои первые научные труды. Первая его работа, действительно, была довольно элементарным исследованием сил, действующих между молекулами в капиллярных явлениях. Следующие четыре работы были посвящены тепловым явлениям. В них Эйнштейн развивает общую теорию этих явлений. Работы эти имели бы исключительно важное значение, если бы... общая теория тепловых явлений не была сформулирована несколько раньше Гиббсом. Молодой Эйнштейн плохо был знаком с научной литературой и не знал о работах великого американца.

Шестая работа называлась «Новое определение размеров молекул». Она была прислана в редакцию немецкого физического журнала «Annalen der Physik» («Анналы физики»), в котором были опубликованы и предыдущие пять статей Эйнштейна, 30 апреля 1905 г. Работа была посвящена диффузии в жидкостях, и в ней, по существу, были заложены первые идеи теории броуновского движения

Эту работу Эйнштейн защитил как диссертацию на степень доктора философии (так тогда называлась ученая степень).

II. Золотой год

1905 г. — год первой русской революции — оказался золотым годом в истории физики. В этом году в журнале «Annalen der Physik» появляются одна за другой еще четыре работы Эйнштейна. В первой из них была создана теория фотоэффекта. Во второй — теория броуновского движения. В третьей были получены основные формулы механики и электродинамики в специальной теории относительности. В четвертой статье была получена одна из самых знаменитых формул XX века — формула, связывающая массу и энергию.

Каждая из этих работ обеспечивала их автору бессмертие. И эти открытия были сделаны человеком, который работал в полном одиночестве, не встречался с учеными-физиками, а о своих идеях рассказывал лишь близким друзьям.

С этих работ Эйнштейна начался новый век в физике.

III. Фотоэффект

В 1900 г. Планк выдвинул гипотезу о том, что атомы испускают свет отдельными порциями — квантами, энергия которых пропорциональна частоте света:

$$E = h\nu. \tag{1}$$

Такое предположение о характере излучения атомов позволяло объяснить некоторые закономерности излучения нагретого тела.

Эйнштейн пошел дальше Планка. Один из вопросов, который он разбирал, был вопрос об ионизации газов светом. Было известно, что свет с большой длиной волны не ионизует атом: существует некоторая критическая длина волны λ_0 такая, что только свет с длиной волны $\lambda < \lambda_0$ может ионизовать атом (для разных атомов λ_0 разная). Загадочность этого явления исчезает, если предположить, что сам по себе свет состоит из порций — квантов, и энергия этих световых квантов связана с частотой света тем же соотношением $E = h\nu$. Если перейти от частоты ν к длине волны $\lambda = c/\nu$, то соотношение (1) примет вид $E = hc/\lambda$. Так что свет с длиной волны $\lambda < \lambda_0$ — это кванты, энергия которых $E < E_0 = hc/\lambda_0$, где E_0 — энергия ионизации атома.

Основываясь на предположении о квантовом характере света, Эйнштейн создал теорию фотоэффекта, объясняющую основные его законы: существование для каждого вещества минимальной частоты света, ниже которой фотоэффект не возникает, и независимость кинетической энергии вылетающих под действием света электронов от интенсивности света.

Если электрон находится вблизи поверхности тела и для того чтобы вырваться за его пределы ему надо совершить работу P (против сил притяжения к положительным зарядам), то под действием света с частотой ν (и соответственно, с энергией квантов $h\nu$) он вылетит с кинетической энергией

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - P.$$

Если энергия квантов света $E = h\nu \leqslant P$, то $v = 0$ — фотоэффект не возникает. Максимальная энергия электронов, вылетающих из тела под действием света, не зависит от интенсивности света — она определяется только частотой падающего света.

К формуле фотоэффекта Эйнштейн пришел, размышляя над различием между описанием частиц и света: «... может оказаться, что теория света, оперирующая непрерывными пространственными функциями, приведет к противоречию с опытом, когда ее будут применять к явлениям возникновения и превращения света», — писал он в начале работы под странным названием «Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света» *), полученной редакцией упомянутого журнала 18 марта 1905 г.

Еще много лет Эйнштейн продолжал обсуждать вопрос о том, состоит

*) Эвристический — значит относящийся к изобретению, открытию, а также приводящий к открытию новых идей.

Эйнштейн — технический эксперт Швейцарского патентного бюро (Берн, 1903 г.).

ли электромагнитное поле из квантов или же, как думал Планк, дело только в том, что атом излучает и поглощает свет порциями, как автомат, который отмеряет порциями воду или бензин.

Правильной оказалась точка зрения Эйнштейна. В его работе о фотоэффекте родилось понятие об элементарной частице — кванте света. Первой элементарной частицей был электрон, второй стал квант света — фотон. С тех пор список элементарных частиц непрерывно пополняется.

IV. Броуновское движение

«О движении взвешенных частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты» — так называлась вторая работа «золотого года» (она поступила в редакцию 11 мая).

Эйнштейн сравнивает между собой движение молекулы в жидкости и движение маленького плавающего внутри этой жидкости (как говорят, «взвешенного») шарика. И молекула, и микроскопический шарик, подвергаясь ударам других молекул, движутся в жидкости хаотически. Рассматривая это сходство более подробно, Эйнштейн, исходя из самых общих законов кинетической теории, показал, что средние кинетические энергии хаотически движущихся молекулы и шарика должны быть одинаковы.

«...согласно молекулярной теории тепла, тела размерами порядка 1/1000 мм, взвешенные в жидкости, совершают видимое беспорядочное движение, обязанное тепловому движению молекул. Такое движение на самом деле наблюдалось биологами, которые называют его броуновским движением» (из письма Эйнштейна к его другу Габихту весной 1905 г.).

Шарик в жидкости, двигаясь беспорядочно, будет все же медленно перемещаться в жидкости, «диффундируя» в ней (как молекула). Эйнштейн показал, что среднее значение квадрата перемещения шарика пропорционально времени.

Подробную теорию броуновского движения Эйнштейн опубликовал немного позже (в 1906 г.) в другой статье. В ней он сообщает, что броуновское движение, которое наблюдали другие физики, действительно хорошо описывается его формулами. Эта работа Эйнштейна положила конец многолетним спорам о реальности существования молекул.

V. Рождение теории относительности

Многие крупнейшие физики и математики (особенно Лоренц и Пуанкаре) думали о том, как надо описывать оптические явления в движущейся системе координат. Свои взгляды на этот вопрос Эйнштейн изложил в статье «К электродинамике движущихся тел». Она поступила в редакцию 30 июля 1905 г.

В механике все инерциальные системы равноправны (принцип Галилея). Эйнштейн начинает статью с более широкой гипотезы: «... для всех координатных систем, для которых справедливы уравнения механики, справедливы одни и те же электродинамические и оптические законы...». И дальше он описывает свою теорию так: «Это предположение (содержание которого в дальнейшем будет называться «принципом относительности») мы намерены превратить в предпосылку и сделать, кроме того, добавочное допущение, находящееся с первым лишь в кажущемся противоречии, а именно, что свет в пустоте всегда распространяется с определенной скоростью v, не зависящей от состояния движения излучающего тела...».

Один из главных выводов теории, который никак не хотели принять ее критики, состоял в том, что длительность любого физического процесса и интервал между двумя событиями оказываются разными с точки зрения систем отсчета, которые движутся с разными скоростями. Короче говоря, *в разных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, время течет по-разному*. Сейчас это — твердо установленный факт. Мезоны, «родившиеся» в верхних слоях атмосферы на высоте, скажем, 10 км, доходят до поверхности Земли. Двигаясь со скоростью, близкой к скорости света, мезоны проходят это расстояние приблизительно за 10^{-4} с, хотя в покое мезон распадается за время $2\cdot10^{-6}$ с. С точки зрения теории относительности все ясно: в системе, где мезон покоится, еще не успели пройти $2\cdot10^{-6}$ с. Остановившись в приборе на Земле, мезон распадается (именно так и был он открыт). Таких примеров можно привести сейчас много. Открытие Эйнштейна прочно вошло в фундамент современной физики.

В кабинете Эйнштейна висели три портрета: Ньютона, Фарадея и Максвелла. В своей теории относительности он объединил в единую науку механику, созданную Ньютоном, и теорию электричества и магнетизма, созданную Фарадеем и Максвеллом.

VI. Эйнштейн о себе

«Иногда меня спрашивают, как я создал теорию относительности. Я думаю, что это произошло по следующей причине. Нормальный взрослый человек никогда не размышляет о проблемах пространства и времени. О таких вещах он думает лишь в детстве. Мое же умственное развитие оказалось замедленным, и я принялся размышлять о пространстве и времени, лишь достигнув зрелого возраста. Естественно, что мне удалось глубже проникнуть в проблему, чем ребенку с обычными способностями...».

VII. Масса и энергия

В работе, о которой мы только что говорили, Эйнштейн получил выражение для массы движущегося электрона — формулы, определяющие связь между массой электрона и его скоростью.

Если сила перпендикулярна скорости электрона (электрон движется по окружности), то он ведет себя так, как будто его масса («поперечная масса») равна $\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, где m_0 — масса покоя электрона (ньютоновская масса), v — его скорость. Величину $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ называют сейчас лоренцевым фактором. Если сила направлена вдоль скорости электрона (электрон движется прямолинейно), то он ведет себя так, как будто его масса («продольная масса») равна $m_0\gamma^{3/2}$.

Если над электроном производится работа (например, если он движется в электрическом поле), то его энергия возрастает. Эйнштейн показал, что кинетическая энергия K электрона связана с его скоростью соотношением

$$K = m_0(\gamma - 1)c^2.$$

Величину m_0c^2 называют энергией покоя, величину

$$W = m_0\gamma c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (2)$$

— полной энергией электрона. Так что кинетическая энергия электрона равна разности полной энергии и энергии покоя.

Для тех, кто знает элементы дифференциального исчисления, приведем вывод формулы (2). Полное изменение энергии, очевидно, равно работе, то есть произведению силы на перемещение (напомним, что электрон движется прямолинейно):

$$\Delta W = f\Delta x = ma\Delta x,$$

где a — ускорение электрона. Заменяя a на отношение $\Delta v/\Delta t$ и вспоминая, что $v = \Delta x/\Delta t$, получим:

$$\Delta W = m\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta x = m\Delta v \cdot v,$$

или, заменяя приращение дифференциалами,

$$dW/dv = mv.$$

Если мы подставим $m = m_0\gamma^{3/2}$ и решим это простое уравнение, то получим формулу (2). Поэтому с W согласуется формула для продольной массы. Напомним, что сила, перпендикулярная скорости, не совершает работы!

27 сентября 1905 г. в редакцию того же журнала пришла совсем маленькая заметка Эйнштейна «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?». Если раньше говорилось об изменении массы тела с ростом скорости, то в этой заметке было доказано, что любое изменение энергии тела изменяет и его массу: «Масса тела есть мера содержащейся в нем энергии; если энергия изменяется на величину L, то масса меняется, соответственно, на величину $L/(9\cdot 10^{16})$, причем здесь энергия измеряется в джоулях, а масса — в килограммах».

Этим и устанавливается формула $E = mc^2$, как ее пишут сейчас (размерность c — м/с).

Новую формулу было очень трудно проверить в то время. В следующей работе Эйнштейн, предлагая способ измерения отношения продольной и поперечной масс, замечает: «Автор не в состоянии сам поставить подобный эксперимент и будет рад, если кто-нибудь из физиков заинтересуется предложенным методом». Сейчас формулы теории относительности проверены на ускорителях, во многих приборах, но в начале века надо было понять всю глубину теории, чтобы в них поверить.

VIII. Работа Бозе

В 1900 г. Планк объяснил, каковы закономерности распределения интенсивности света в спектре нагретого тела. Для этого ему пришлось сделать предположение, что свет излучается и поглощается квантами. Как мы уже говорили, через пять лет Эйнштейн доказал, что кванты существуют в свободном виде и поведение их очень похоже на поведение частиц. С такой точки зрения предложенную Планком формулу можно понимать как формулу, которая определяет, сколько квантов с определенным значением энергии вылетает из нагретого тела. Свет с этой точки зрения можно рассматривать как фотонный газ, а распределение энергии между отдельными фотонами этого газа («сколько фотонов имеют данную энергию?») описывается формулой Планка. Но никто, даже сам Эйнштейн, не воспользовался в то время этой идеей.

В 1924 г. Эйнштейн получил письмо от физика из Дакки (сейчас это столица Народной республики Бангладеш). К письму была приложена статья, в которой идея Эйнштейна о квантах была использована самым решительным образом. Не вдаваясь в обсуждение тонких вопросов, автор статьи Бозе, принимая безоговорочно гипотезу световых квантов и рассматривая их собрание как идеальный газ, вывел формулу для распределения квантов по энергиям совсем так, как выводят формулы для идеального газа в кинетической теории. При этом Бозе считал (хотя и не подчеркнул этого в своей работе), что кванты абсолютно тождественны, если они имеют одинаковые энергии. Формула Планка получилась совершенно строго. Это означало, что гипотеза Эйнштейна о реальности квантов на самом деле доказывалась уже формулой Планка, но никто этого до Бозе не смог заметить. Эйнштейн был в восторге от того, что с квантами можно обращаться как с атомами. Он перевел статью Бозе на немецкий язык и сам послал ее в журнал, где она и была напечатана. В примечании Эйнштейн написал: «Вывод формулы Планка, предложенный Бозе, является большим достижением. Использованный им метод дает также квантовую теорию идеального газа, которую я изложу в другом месте». Он увидел в формуле Бозе нечто совершенно новое, что привело его к новому открытию.

IX. Статистика Бозе — Эйнштейна

Идея, которая возникла у Эйнштейна, когда он читал статью Бозе, состояла в том, что если, пользуясь гипотезой о тождественности фотонов с одинаковыми энергиями, можно было вывести формулу Планка, то можно попытаться применить тот же метод к идеальному квантовому одноатомному газу, атомы которого имеют отличную от нуля массу.

Результат был великолепен. Сразу же получились формулы, описывающие все тепловые свойства такого газа, и можно было, продолжив аналогию с фотонами, задуматься о неожиданных волновых свойствах частиц, о которых в 1924 г. написал в своей диссертации Луи де Бройль.

В 1924 г. на физической конференции в австрийском городе Инсбруке Эйнштейн обратил внимание на то, что из теории де Бройля следует существование явлений дифракции и интерференции в молекулярных пучках.

В теории одноатомного газа он эффективно использовал идею квантов для вывода уравнения состояния квантового идеального газа и изучения других его свойств.

Новая теория получила название статистики Бозе — Эйнштейна. Она была создана на год раньше, чем появилась законченная квантовая механика. Дальнейшее развитие теории привело к созданию теории сверхтекучести гелия и многих других удивительных явлений в квантовом мире. Но Эйнштейн сам не был удовлетворен. Он продолжал считать, что метод Бозе «...ни в коей мере не является бесспорным, но кажется обоснованным лишь благодаря успеху в случае излучения...». Хотя Эйнштейн был первым, кто ввел гипотезу квантов в теорию света, он до конца своих дней не мог примириться с двойственной природой частиц и излучения, стараясь найти другое описание реальности. Так до конца своих дней основоположник теории квантов и не смог примириться с современной квантовой физикой.

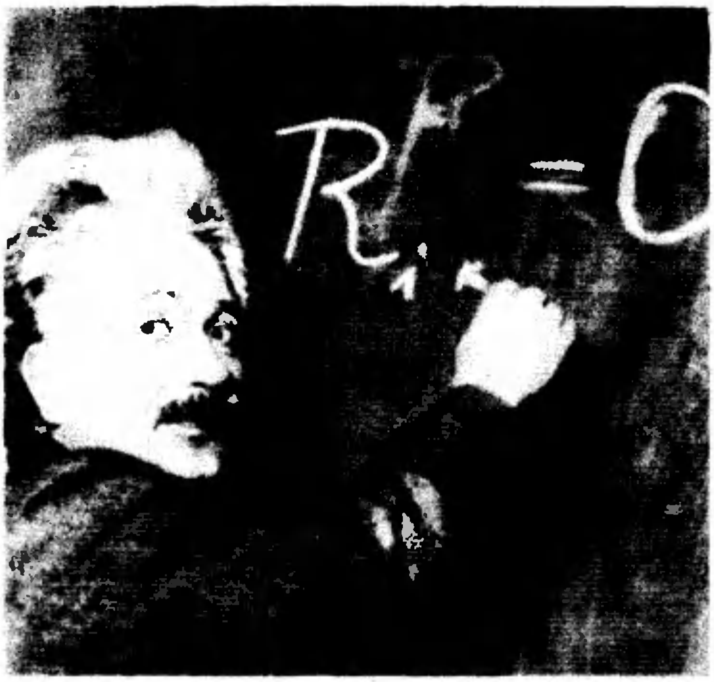
X. Вынужденное и спонтанное излучение

В 1916 г. размышления Эйнштейна еще раз привели его к замечательным результатам.

Вопрос, который интересовал Эйнштейна, был по существу прост. Надо было понять, как гипотеза квантов должна изменить представления о законах испускания и поглощения света.

Если свет состоит из квантов — фотонов, то почти очевидно, что вероятность поглотить свет заданной частоты должна быть тем больше, чем больше квантов этой частоты существует в потоке света. Чем же определяется вероятность излучения света данной частоты?

Ответ, данный Эйнштейном на этот вопрос, станет понятней, если мы рассмотрим следующий пример из области механических колебаний. Как будет вести себя колеблющаяся струна, если около нее будет непрерывно



◄ **Эйнштейн на лекции (США, 1932 г.).**

► **Страница из письма Эйнштейна немецкому астроному Халле, в котором обсуждается вопрос о возможности наблюдения отклонения световых лучей в поле тяжести Солнца.**

колебаться с той же частотой другая струна? Если колебания струн будут в фазе — размах колебаний первой струны возрастет; если колебания будут в противофазе — колебания первой струны затухнут. Оба процесса будут тем интенсивнее, чем с большей амплитудой колеблется струна-«донор», колебания которой поддерживаются каким-то источником энергии. (Если струны-донора нет, то колебания первой струны будут затухать, даже если нет трения, и вся ее энергия уйдет на создание звука в воздухе.)

Анализ аналогичной ситуации для света и атома привел Эйнштейна к выводу, что если вероятность поглотить квант пропорциональна числу имеющихся в луче света квантов, то вероятность испустить квант состоит из двух слагаемых. Одно из них описывает индуцированное излучение — излучение, которое обусловлено воздействием на атом света (который «раскачивает» атом). Эта часть пропорциональна числу имеющихся в луче света квантов. Второе слагаемое не зависит от числа квантов и не обращается поэтому в нуль для атома в вакууме. Это слагаемое описывает так называемое спонтанное, то есть самопроизвольное, излучение.

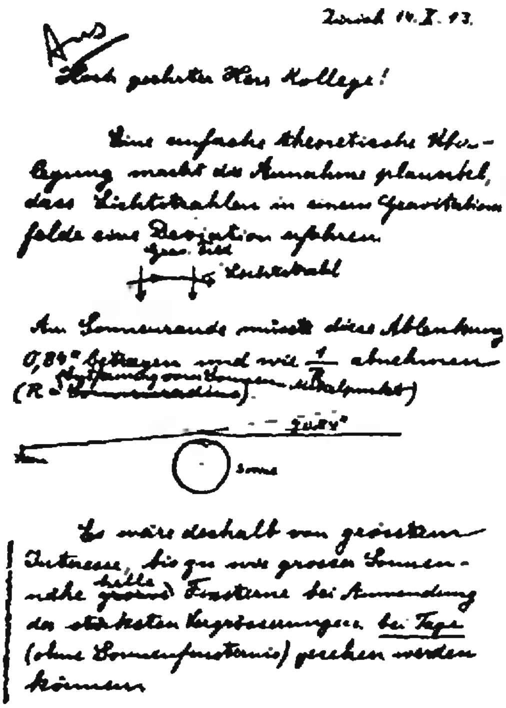
Если в среду попадает мощный световой поток, то есть большое количество квантов, индуцированное излучение преобладает, становясь очень интенсивным.

С индуцированным излучением связан принцип работы лазера. Эффект, предсказанный Эйнштейном в 1916 г., стал сейчас основным для огромного количества лазерных приборов и установок.

XI. Общая теория относительности и отклонение света в поле Солнца

Об общей теории относительности, или о теории тяготения, рассказывать трудно. Очень немногие поняли ее фундаментальное значение. Академик Ландау любил говорить, что хотя он сам глубоко понимает общую теорию относительности Эйнштейна, он не может себе представить, как можно было до нее догадаться.

Но один из вопросов, с которого начал Эйнштейн, совсем прост: как влияет поле тяжести, например, поле Солнца, на распространение света? Как кто-то вспомнил много позже, этим вопросом интересовались еще в 18 веке, и тогда же был получен первый ответ. Ответ был тоже прост. Если согласиться с Ньютоном, что


Zürich 14.X.13.

Hoch geehrter Herr Kollege!

Eine einfache theoretische Überlegung macht die Annahme plausibel, dass Lichtstrahlen in einem Gravitationsfelde eine Deviation erfahren.

Am Sonnenrande müsste diese Ablenkung 0,84" betragen und wie $\frac{1}{R}$ abnehmen (R = Abstand vom Sonnenmittelpunkt).

Es wäre deshalb von grösstem Interesse, bis zu wie grosser Sonnennähe helle Fixsterne bei Anwendung der stärksten Vergrösserungen bei Tage (ohne Sonnenfinsternis) gesehen werden können.

свет есть поток корпускул, то корпускулы должны пролетать около Солнца как кометы. Траекторию кометы, которая проходит около Солнца, сосчитать нетрудно. Расчет дает, что она отклонится от прямой на 0,85″. Это малое отклонение было сосчитано еще в 1801 году немецким астрономом Зольднером.

В 1915 г. Эйнштейн получил другой результат: согласно созданной им теории тяготения отклонение в поле Солнца должно составлять 1,7″. «Удвоение» эффекта было следствием того, что около Солнца перестают действовать законы геометрии Евклида и в результате изменяется сам закон всемирного тяготения Ньютона. Тела около Солнца притягиваются к нему сильнее, чем это следует из закона всемирного тяготения.

В 1915 г. Эйнштейн уже не был никому не известным экспертом. К его словам прислушивался весь мир. И хотя в Европе бушевала война, астрономы начали обсуждать, как наблюдать предсказанное отклонение. Ведь в 1919 г. должно было произойти солнечное затмение, во время которого можно было бы проверить, существует ли эффект, предсказанный Эйнштейном. Затмение ожидалось 29 мая, когда вблизи Солнца проходят лучи света от многих очень ярких звезд. В апреле две экспедиции покинули Англию. Одна направилась в Бразилию, вторая — на остров Принсипи вблизи западного берега Африки. 29 мая на острове все утро шел дождь, но перед самым затмением небо прояснилось, и экспедиция смогла начать фотографирование. Все же погода сделала свое дело: облака заслонили звезды, и когда спустя шесть дней снимки были обработаны, только один снимок дал хорошие подтверждения эффекта Эйнштейна. Снимки из Бразилии обрабатывались в Англии. Только четыре месяца спустя, 22 сентября (обычные почтовые связи были нарушены войной!), пришла телеграмма от Лоренца из Голландии: «Эддингтон обнаружил смещение звезд у края Солнца...». Конечно, никакое наблюдение не может доказать теорию окончательно, но с тех пор в теории Эйнштейна мало кто сомневался. Лишь небольшая группа старых физиков пыталась (и с большим упорством) отрицать ее выводы.

Но время классической физики прошло. Сейчас существует много фактов, подтверждающих общую теорию относительности. Самое главное для физиков нашего времени — это то, что без этой теории нельзя понять, как развивается Вселенная.

XII. Эволюция Вселенной

Наверное, самое величественное в здании, построенном Эйнштейном, — это его космологические работы. В 1917 г. была опубликована работа под названием «Вопросы космологии и общая теория относительности».

Эта работа выделяется своей смелостью. Подобно Ньютону, который объявил о том, что закон падения тел на Земле тот же, что и законы, управляющие движением небесных тел, Эйнштейн заявил, что законы общей теории относительности, проверенные в пределах Солнечной системы, справедливы для всей Вселенной. Он написал и решил уравнения Вселенной. Решение, которое Эйнштейн получил, было удивительным: Вселенная оказалась замкнутой...

Однако при анализе этих уравнений Эйнштейн не учел всех возможных решений. Пять лет спустя советский физик А. Фридман показал, что уравнения Эйнштейна имеют другие решения, но эти решения не статические — Вселенная расширяется. Эйнштейн сначала не поверил Фридману и объявил, что тот ошибся. В Берлине в это время находился советский физик Ю. Крутков, который смог убедить Эйнштейна в его неправоте, и 31 мая 1923 г. Эйнштейн опубликовал маленькую заметку: «...я считаю — писал он — результаты Фридмана правильными и проливающими новый свет. Оказывается, уравнения поля допускают наряду со статическими также и динамические (т. е. переменные относительно времени) центрально-симметричные решения для структуры пространства».

Решение Фридмана не требовало, чтобы Вселенная была обязательно замкнута. Современные данные указывают скорее на то, что Вселенная бесконечно расширяется, причем скорость ее расширения растет с расстоянием примерно по закону

$$v = \frac{R}{T},$$

где T — постоянная, равная $2 \cdot 10^{10}$ лет. Этот закон носит имя открывшего его астронома Хаббла, а постоянную $H = 1/T$ называют постоянной Хаббла. Расширение Вселенной подтверждено многими наблюдениями, а закон Хаббла проверен до расстояний, которые свет проходит за 10—12 миллиардов лет.

Так Эйнштейн завершил «покорение» законов Вселенной, начатое Ньютоном. Человек на Земле понял законы, которыми управляется космос. «Самое непонятное в природе — это то, что ее можно понять», — сказал Эйнштейн.

XIII. Гравитационные волны

О гравитационных волнах скажем лишь совсем коротко.

Первым, кто понял, что гравитационное взаимодействие распространяется со скоростью света, был Пуанкаре. Существование волн тяготения было простым следствием уравнений общей теории относительности. Эта теория не отвергала того, что никакой сигнал не может быть передан со скоростью, большей скорости света. В 1937 г. (вместе с Розеном) Эйнштейн исследовал теоретически гравитационные волны — эту его работу продолжают и сейчас многие теоретики. Гравитационные волны пока не обнаружены экспериментально, но, по-видимому, не очень далек тот день, когда на Земле зарегистрируют гравитационный сигнал от какой-нибудь великой космической катастрофы — рождения сверхновой звезды или еще чего-нибудь в этом роде.

Эпилог

Мы кончаем на 1937 г. Эйнштейн не перестал работать; он до самой своей смерти 18 апреля 1955 г. все больше и больше погружался в новые теории, о которых рассказать невозможно. Он хотел найти еще более общие законы, чем законы тяготения — он работал над тем, что он сам называл единой теорией поля. Последние слова в его последней научной статье были: «... сейчас никто не знает, как найти основу для такой теории».

К работам последних лет Эйнштейна относились по-разному. Многие считали, что успех ему изменил, и все, что он делал в эти годы, было неверным. Многие даже считали, что и сама задача безнадежна. Так ли это? Можно лишь сказать, что сейчас такое мнение уже не кажется бесспорным. Все чаще на страницах журналов появляются слова «единая теория поля». Конечно, время течет, и новый путь — совсем не тот, которым шел Эйнштейн.

Но глубокие идеи Эйнштейна не исчезают.

«Все, что исходило из его в высшей степени великого интеллекта, было столь ясным и красивым, как хорошие произведения искусства» — эти слова, написанные Эйнштейном в память Лоренца, в полной мере относятся к нему самому.

Автобиографические заметки

В 1949 году Альберт Эйнштейн написал «Автобиографические заметки». В них он рассказал об основных научных принципах, которыми руководствовался в своем творчестве. Незадолго до смерти, в 1955 году, Эйнштейн написал также очень краткие «Автобиографические наброски» — воспоминания о студенческих годах и о том, как зарождалась общая теория относительности. Мы помещаем здесь выдержки из этих работ, касающиеся раннего периода жизни великого ученого.

...В 1895 г. в шестнадцатилетнем возрасте я приехал из Италии в Цюрих, после того как без школы и без учителя провел год в Милане у родителей. Моей целью было поступление в политехникум, хотя я не совсем ясно представлял себе, как это можно осуществить. Я был своенравным, но скромным молодым человеком, который приобрел свои необходимые знания спорадически, главным образом путем самообразования. Я жаждал глубоких знаний, но обучение не казалось мне легкой задачей: я был мало приспособлен к заучиванию и обладал плохой памятью. С чувством вполне обоснованной неуверенности я явился на вступительный экзамен на инженерное отделение. Экзамен показал мне прискорбную недостаточность моей подготовки, несмотря на то, что экзаменаторы были снисходительны и полны сочувствия. Я понимал, что мой провал был вполне оправдан. Отрадно было лишь то, что физик Г. Вебер сказал мне, что я могу слушать его коллег, если останусь в Цюрихе. Но ректор, профессор Альбин Герцог, рекомендовал меня в кантональную школу в Аарау, где после годичного обучения я сдал экзамен на аттестат зрелости. Эта школа оставила след благодаря своему либеральному духу и скромной серьезности учителей, которые не опирались на какие-либо показные авторитеты; сравнение с шестилетним обучением в авторитарно управляемой немецкой гимназии убедительно показало мне, насколько воспитание в духе свободы и чувства личной ответственности выше воспитания, которое основано на муштре, внешнем авторитете и честолюбии. Настоящая демократия не является пустой иллюзией.

В том же году в Аарау у меня возник вопрос: если бы можно было погнаться за световой волной со скоростью света, то имели бы мы перед собой не зависящее от времени волновое поле? Такое все-таки кажется невозможным! Это был первый детский мысленный эксперимент, который относился к специальной теории относительности. Открытие не является делом логического мышления, даже если конечный продукт связан с логической формой.

1896—1900 гг. — обучение на отделении преподавателей специальных дисциплин швейцарского политехникума. Вскоре я заметил, что довольствуюсь ролью посредственного студента. Для того чтобы быть хорошим студентом, нужно обладать легкостью восприятия, готовностью сконцентрировать свои силы на всем том, что читается на лекции, любовью к порядку, чтобы записывать и затем добросовестно обрабатывать преподносимое на лекциях. Всех этих качеств мне основательно недоставало, как я с сожалением установил... Некоторые лекции я слушал с большим интересом. Но обыкновенно я много «прогуливал» и со священным рвением штудировал дома корифеев теоретической физики... Это широкое самостоятельное обучение было простым продолжением более ранней привычки; в нем принимала участие сербская студентка Милева Марич, которая позднее стала моей женой. Однако в физической лаборатории профессора Г. Вебера я работал со рвением и страстью. Захватывали меня также лекции профессора Гейзера по дифференциальной геометрии, которые были настоящими шедеврами педагогического искусства и очень помогли мне позднее в борьбе, развернувшейся вокруг общей теории относительности. Но высшая математика еще мало интересовала меня в студенческие годы. Мне ошибочно казалось, что это настолько разветвленная область, что можно легко растратить всю свою энергию в далекой провинции. К тому же по своей наивности я считал, что для физики достаточно твердо усвоить элементарные математические понятия и иметь их готовыми для применения, а остальное состоит в бесполезных для физики тонкостях, — заблуждение, которое только позднее я с сожалением осознал. У меня, очевидно, не хватало математических способностей, чтобы отличить центральное и фундаментальное от периферийного и не принципиально важного.

В эти студенческие годы развилась настоящая дружба с товарищем по учебе Марселем Гроссманом. Раз в неделю мы торжественно шли с ним в кафе «Метрополь» на набережной Лиммат и разговаривали не только об учебе, но и, сверх того, о всех вещах, которые могут интересовать молодых людей с открытыми глазами. Он не был таким бродягой и чудаком, как я, но был связан со швейцарской средой и в пределах возможного не потерял внутренней самостоятельности. Кроме того, он обладал в избытке как раз теми данными, которых мне не хватало: быстрым восприятием и порядком во всех отношениях. Он не только посещал все лекции, которые мы считали важными, но и обрабатывал их так замечательно, что если бы его тетради перепечатать, то их вполне можно было бы издать. Для подготовки к экзаменам он одалживал мне эти тетради, которые служили для меня спасательным кругом; о том, как мне жилось бы без них, лучше не гадать...

Для меня не подлежит сомнению, что наше мышление протекает в основном, минуя символы (слова), и к тому же бессознательно. Если бы это было иначе, то почему нам случается иногда «удивляться», притом совершенно спонтанно, тому или иному восприятию? Этот «акт удивления», по-видимому, наступает тогда, когда восприятие вступает в конфликт с достаточно установившимся в нас миром понятий. В тех случаях, когда такой конфликт переживается остро и интенсивно, он в свою очередь оказывает сильное влияние на наш умственный мир. Развитие этого умственного мира представляет собой в известном смысле преодоление чувства удивления — непрерывное бегство от «удивительного», от «чуда».

Чудо такого рода я испытал ребенком 4 или 5 лет, когда мой отец показал мне компас. То, что эта стрелка вела себя так определенно, никак не подходило к тому роду явлений, которые могли найти себе место в моем неосознанном мире понятий (действие через прикосновение). Я помню еще и сейчас — или мне кажется, что я помню, — что этот случай произвел на меня глубокое и длительное впечатление. За вещами должно быть что-то еще, глубоко скрытое. Человек так не реагирует на то, что он видит с малых лет. Ему не кажутся удивительными падение тел, ветер и дождь, он не удивляется на луну и на то, что она не падает, не удивляется различию между живым и неживым.

В возрасте 12 лет я пережил еще одно чудо совсем другого рода: источником его была книжечка по евклидовой геометрии на плоскости, которая попалась мне в руки в начале учебного года. Там были утверждения, например, о пересечении трех высот треугольника в одной точке, которые, хотя и не были сами по себе очевидны, могли быть доказаны с уверенностью, исключавшей как будто всякие сомнения. Эта ясность и уверенность произвели на меня неописуемое впечатление. Меня не беспокоило то, что аксиомы должны быть приняты без доказательства. Вообще мне было вполне достаточно, если я мог в своих доказательствах опираться на такие положения, справедливость которых представлялась мне бесспорной. Я помню, например, что теорема Пифагора была мне показана моим дядей еще до того, как в мои руки попала священная книжечка по геометрии. С большим трудом мне удалось «доказать» эту теорему при помощи подобных треугольников; при этом мне казалось, однако, «очевидным», что отношение сторон прямоугольного треугольника должно полностью определяться одним из его острых углов. Вообще мне казалось, что доказывать нужно только то, что не «очевидно» в этом смысле. И предметы, с которыми имеет дело геометрия, не казались мне другой природы, чем «видимые и осязаемые» предметы, т. е. предметы, воспринимаемые органами чувств. Это примитивное понимание основано, конечно, на том, что бессознательно учитывалась связь между геометрическими понятиями и наблюдаемыми предметами (длина — твердый стержень и т. п.)...

Хотя это выглядело так, будто путем чистого размышления можно получить достоверные сведения о наблюдаемых предметах, но такое «чудо» было основано на ошибке. Все же тому, кто испытывает это «чудо» в первый раз, кажется удивительным самый факт, что человек способен достигнуть такой степени надежности и чистоты в отвлеченном мышлении, какую нам впервые показали греки в геометрии...

Эйнштейн — ученик кантональной школы в Аарау (1895 г.).

В возрасте 12—16 лет я ознакомился с элементами математики, включая основы дифференциального и интегрального исчислений. При этом, на мое счастье, мне попались книги, в которых обращалось не слишком много внимания на логическую строгость, зато хорошо была выделена везде главная мысль. Все это занятие было поистине увлекательно; в нем были взлеты, по силе впечатления не уступавшие «чуду» элементарной геометрии, — основная идея аналитической геометрии, бесконечные ряды, понятия дифференциала и интеграла. Мне посчастливилось также получить понятие о главнейших результатах и методах естественных наук по очень хорошему популярному изданию, в котором изложение почти везде ограничивалось качественной стороной вопроса (бернштейновские естественнонаучные книги для народа — труд в 5—6 томов); книги эти я читал, не переводя дыхания. К тому времени, когда я в возрасте 17 лет поступил в Цюрихский политехникум в качестве студента по физике и математике, я уже был немного знаком и с теоретической физикой.

Там у меня были прекрасные преподаватели (например, Гурвиц, Минковский), так что, собственно говоря, я мог бы получить солидное математическое образование. Я же большую часть времени работал в физической лаборатории, увлеченный непосредственным соприкосновением с опытом. Остальное время я использовал главным образом для того, чтобы дома изучать труды Кирхгофа, Гельмгольца, Герца и т. д. Причиной того, что я до некоторой степени пренебрегал математикой, было не только преобладание естественнонаучных интересов над интересами математическими, но и следующее своеобразное чувство. Я видел, что математика делится на множество специальных областей и каждая из них может занять всю отпущенную нам короткую жизнь. И я увидел себя в положении буриданова осла, который не может решить, какую же ему взять охапку сена. Дело было, очевидно, в том, что моя интуиция в области математики была недостаточно сильна, чтобы уверенно отличить основное и важное от остальной учености, без которой еще можно обойтись. Кроме того, и интерес к исследованию природы, несомненно, был сильнее; мне как студенту не было еще ясно, что доступ к более глубоким принципиальным проблемам в физике требует тончайших математических методов. Это стало мне выясняться лишь постепенно, после многих лет самостоятельной научной работы. Конечно, и физика была разделена на специальные области, и каждая из них могла поглотить короткую трудовую жизнь, так и не удовлетворив жажды более глубокого познания. Огромное количество недостаточно увязанных эмпирически фактов действовало и здесь подавляюще. Но здесь я вскоре научился выискивать то, что может повести в глубину, и отбрасывать все остальное, все то, что перегружает ум и отвлекает от существенного...

Эйнштейн глазами современников

Много книг и статей написано об Эйнштейне. Он оставил глубокий след в памяти всех, с кем дружил, работал и встречался. Мы помещаем здесь высказывания выдающихся физиков разных стран: датчанина Нильса Бора, швейцарца Вильгельма Паули, советского физика Абрама Федоровича Иоффе, поляка Леопольда Инфельда, немцев Арнольда Зоммерфельда, Макса Лауэ и Макса Борна, американца Роберта Оппенгеймера, — которые помогут нашим читателям лучше представить себе этого замечательного человека и оценить его вклад в развитие науки. Приводится также высказывание первого советского комиссара просвещения Анатолия Васильевича Луначарского, который встречался с Эйнштейном в 1922 году.

«... Человечество всегда будет в долгу перед Эйнштейном за устранение ограничений нашего мировоззрения, которые были связаны с примитивными представлениями об абсолютном пространстве и времени. Он дал нам картину мира, характеризующуюся единством и гармонией, которые превосходят самые смелые мечты прошлых лет...»

Нильс Бор

«...Как ученый, Эйнштейн — величина одного порядка с Исааком Ньютоном... Подобно тому, как во времена Ньютона современники не могли предугадать богатство и глубину всех последствий его влияния, так же мало мы можем представить себе, какое влияние наследство Эйнштейна окажет на ход истории. Это покажет время...»

Макс Лауэ

«...С *глубокомыслием и последовательностью* философского мышления, не встречавшимися никогда до сих пор в умах

Ирэн Жолио-Кюри и Альберт Эйнштейн.

естествоиспытателей, с математической силой, которая напоминает Гаусса и Римана, Эйнштейн возвел в течение десяти лет здание, перед которым мы, следившие из года в год за его работой с напряженным вниманием, стоим, чувствуя изумление и головокружение...»

Арнольд Зоммерфельд

«...Я встречал в своей жизни многих ученых, более способных, чем я. Я восхищался их интеллектом, быстротой, с которой они решали проблемы, их блистательной диалектикой и тем, что они преодолевали трудности, непреодолимые для меня. В такие моменты переживаешь удивительное чувство восхищения и унижения, потому что не может быть неомраченной радость, когда видишь, как другой одолел препятствия, казавшиеся тебе неодолимыми. Но ни разу не возникло у меня и тени этого досадного чувства, когда я работал с Эйнштейном...»

Леопольд Инфельд

«...Жизнь его, устремленная в будущее, будет всегда напоминать нам о редком в наше время идеале человека, мыслителя и созерцателя, чьи помыслы были безраздельно отданы великим проблемам строения Вселенной...

...Для нового мышления, введенного в физику Эйнштейном, характерен непредвзятый, строящийся в конечном счете на эмпирически проверяемых принципах анализ традиционных фундаментальных понятий. При этом некоторые гипотезы оказываются излишними и слишком узкими, а некоторые понятия удается вообще исключить...»

Вильгельм Паули

«...Эйнштейн был передовым ученым и высоко ценил построение социализма в нашей стране, осуществляющего заветные мечты лучших людей всех времен. В борьбе двух миров — коммунизма и капитализма — он был на нашей стороне и на мой прямой вопрос дал недвусмысленный ответ...»

Абрам Федорович Иоффе

«... И после войны он неустанно поднимал свой голос в защиту свободы и мира, прежде всего — против дальнейшего использования атомной бомбы. При этом, как старый борец за свободу, он выступил против преследований за убеждения, предпринятых в Соединенных Штатах под эгидой сенатора Маккарти...»

Макс Лауэ

«...В частной жизни Эйнштейн был скромным человеком, чуждавшимся почестей. Я помню, как, узнав о предполагавшемся приходе группы его почитателей, он предложил скрыться от них и уйти часа на три в парк. Помню, как однажды Эйнштейн договорился, что придет за мной к знакомым, где его игре на скрипке должны были аккомпанировать на рояле. Хозяева квартиры хотели воспользоваться этим, чтобы продемонстрировать своим гостям знаменитого Эйнштейна. Но, увидев посторонних, он надел шапку и остался только при условии, что все двери будут заперты и никого, кроме аккомпаниа-

Эйнштейн, Эренфест (сидят слева), Ланжевен (сидит в центре), Камерлинг-Оннес (стоит слева) и Вайс. (Лейден, 1902 г.)

торши, в комнате не будет. А игра Эйнштейна была чрезвычайно музыкальной и выразительной...»

Абрам Федорович Иоффе

«... В его маленькой комнате не было никаких покрывал, ковров, картин — только кровать, стол, стул, книжный шкаф с несколькими книгами и несколько пачек оттисков. Любое имущество было ему в тягость, и в стремлении к обладанию собственностью он видел самую глубокую основу для ссор и войн между людьми...»

Макс Борн

«...Эйнштейн был... по моему впечатлению... человеком одиноким... У него были, конечно, бесчисленные ученики, если под этим понимать людей, которые, читая его книги или слушая его лекции, учились у него новому взгляду на физику, на природу нашего мира, учились новому мировоззрению. Но он не создал школы. У него было мало студентов, о которых бы он заботился как о своих учениках и последователях. В нем всегда жил дух ученого-одиночки, резко отличавший его от научных коллективов, столь популярных в наши дни. Не было в нем духа сотрудничества, под знаком которого протекает развитие некоторых других наук. В последние годы Эйнштейн работал вместе с некоторыми сотрудниками. Они обычно назывались его помощниками... Сотрудники дали Эйнштейну то, чего ему не хватало в молодости...»

Роберт Оппенгеймер

«...Глаза у Эйнштейна близорукие, рассеянные. Кажется, что уже давно и раз навсегда больше половины его взоров обратились куда-то внутрь. Кажется, что значительная часть зрения Эйнштейна постоянно занята вместе с его мыслью каким-то начертанием исчислений. Глаза поэтому полные абстрактной думой и кажутся даже немного грустными. Между тем в общежитии Эйнштейн чрезвычайно веселый человек. Он любит пошутить... он смеется добродушным, совершенно детским смехом. При этом на мгновение глаза его делаются совершенно детскими. Его необыкновенная простота создает обаяние, что так и хочется как-то приласкать его, пожать ему руку, похлопать по плечу — и сделать это, конечно, с огромным уважением. Получается какое-то чувство нежного участия, признания большой беззащитной простоты и вместе с тем чувство беспредельного уважения...»

Анатолий Васильевич Луначарский

А. Эйнштейн

$E = mc^2$: настоятельная проблема нашего времени

Чтобы понять принцип эквивалентности массы и энергии, мы должны обратиться к двум законам сохранения (или «баланса»), игравшим независимо один от другого выдающуюся роль в дорелятивистской физике. Мы имеем в виду законы сохранения энергии и импульса. Первый из них, выдвинутый Лейбницем еще в XVII в., рассматривался в XIX в. по существу как следствие принципов механики.

Рассмотрим, например, маятник, который качается между точками A и B. В этих точках его масса m расположена выше наиболее низкой точки траектории C на величину h (рис. 1). С другой стороны, в точке C разность высот исчезает, но вместо этого масса приобретает скорость v. Дело обстоит так, как если бы разность высот могла бы целиком превращаться в скорость, и наоборот. Точное соотношение должно иметь вид $mgh = \frac{m}{2}v^2$, где g — ускорение, сообщаемое силой земного тяготения. Интересно, что это соотношение не зависит ни от длины маятника, ни от пути, по которому движется масса.

Значение этого факта заключается в том, что в процессе колебания нечто сохраняется и это нечто есть энергия. В точках A и B это — энергия положения, или «потенциальная» энергия; в точке C это — энергия движения, или «кинетическая» энергия. Если такой взгляд справедлив, то сумма $mgh + \frac{m}{2}v^2$ должна иметь одно и то же значение при любом положении маятника, если под h понимать высоту, на которой находится масса m над C, а под v — скорость в этой же точке траектории маятника. И эта сумма действительно сохраняется. Обобщение этого принципа приводит нас к закону сохранения механической энергии. Но что происходит, когда трение останавливает маятник?

Ответ дает изучение тепловых явлений. Анализ этих явлений, основанный на предположении, что тепло есть неуничтожаемая субстанция, перетекающая из более горячего тела в более холодное, приводит нас, казалось бы, к закону «сохранения тепла». С другой стороны, с незапамятных времен было известно, что тепло может создаваться трением, как, например, при добывании огня трением палочек у индейцев. Физики долго не могли объяснить этот способ «добывания» тепла. Их трудности были преодолены лишь тогда, когда было установлено, что на создание любого заданного количества тепла нужно затратить в точности пропорциональное количество механической энергии. Таким образом, мы приходим к принципу «эквивалентности работы и тепла». В нашем маятнике, например, механическая энергия благодаря трению постепенно превращается в тепло.

Таким образом, законы сохранения механической и тепловой энергии слились в единый закон. Это привело физиков к мысли о возможности

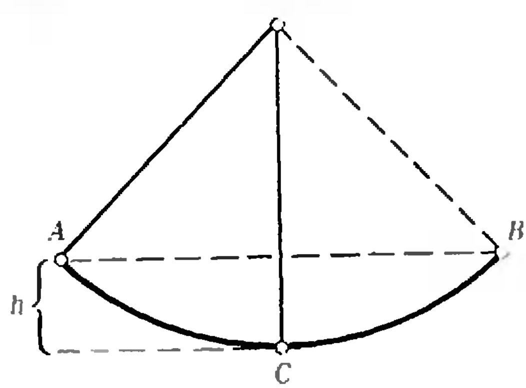


Рис. 1.

дальнейшего расширения закона сохранения энергии — применительно к химическим и электромагнитным процессам и вообще ко всем процессам. Оказалось, что в нашей физической системе именно полная сумма энергий остается постоянной независимо от характера возможных превращений.

Теперь о принципе сохранения массы. Масса определяется как противодействие тела ускорению (инертная масса). Она определяется также весом тела (тяжелая масса). То обстоятельство, что два столь различные определения приводят к одному и тому же значению массы тела, само по себе является поразительным. Согласно принципу сохранения (а именно: масса остается неизменной при любых физических или химических превращениях), масса является существенной (ввиду своей неизменности) характеристикой материи. Нагревание, плавление, испарение, образование химических соединений не должны изменять полной массы.

Физики считали этот принцип справедливым еще несколько десятилетий тому назад. Однако он оказался несостоятельным перед лицом специальной теории относительности. Поэтому он слился с законом сохранения энергии, подобно тому, как примерно шестьюдесятью годами раньше закон сохранения механической энергии объединился с законом сохранения тепла. Мы могли бы сказать, что закон сохранения энергии, поглотив ранее закон сохранения тепла, включил теперь в себя и принцип сохранения массы и управляет всем единолично.

Эквивалентность массы и энергии принято выражать (хотя это и не совсем точно) формулой $E = mc^2$, где c — скорость света, составляющая около 186 000 миль/сек, E — энергия, содержащаяся в покоящемся теле, m — его масса. Энергия, соответствующая массе m, равна этой массе, умноженной на квадрат чудовищно большой скорости света, т. е. на единицу массы приходится огромное количество энергии.

Но если каждый грамм вещества содержит столь большое количество энергии, то почему это обстоятельство так долго оставалось незамеченным? Ответ достаточно прост: до тех пор пока энергия не выходит наружу, она остается незамеченной. Дело обстоит так же, как со сказочно богатым человеком, который никогда не тратит ни цента: никто не может сказать, насколько он богат.

Мы можем теперь разрешить это соотношение относительно m и сказать, что увеличение энергии тела на величину E должно сопровождаться увеличением его массы на величину E/c^2. Я легко могу сообщить некоторому телу энергию, нагрев, например, его на десять градусов. Так почему же никогда не замечалось увеличения массы, или увеличения веса, связанного с этим изменением? Дело в том, что в приращении массы огромный множитель c^2 входит в знаменатель дроби. Увеличение массы слишком мало, чтобы его можно было измерить непосредственно даже самыми чувствительными весами.

Чтобы увеличение массы было измеримым, изменение энергии, приходящееся на единицу массы, должно быть невероятно большим. Нам известно только одно явление, где освобождается такого порядка количество энергии в расчете на единицу массы; это — радиоактивный распад. Схематически процесс идет следующим образом: атом с массой M расщепляется на два атома с массами M' и M'', которые разлетаются с огромной кинетической энергией. Если мы остановим эти атомы, т. е. заберем у них энергию движения, то они в совокупности будут обладать гораздо меньшей энергией, чем исходный атом. Согласно принципу эквивалентности, суммарная масса $M' + M''$ продуктов распада должна быть несколько меньше, чем первоначальная масса M распадающегося атома, что противоречит старому принципу сохранения массы. Относительная разность этих масс составляет примерно десятую долю процента.

Сейчас мы не можем реально измерять вес отдельного атома. Однако существуют косвенные методы, позволяющие точно измерить вес атомов. Мы можем также определить кинетические энергии, передаваемые продуктам распада M' и M''. Таким образом, оказалось возможным провести проверку и подтвердить соотношение эквивалентности. Кроме того, этот принцип позволяет нам рассчитать заранее по известным с большой точностью атомным весам, какое именно количество энергии должно выделиться при любом интересующем нас атомном распаде. Конечно, этот принцип ничего не говорит о том, когда (или каким образом) произойдет распад.

Происходящие события можно проиллюстрировать на нашем примере с богачом. Атом M — это богатый купец, который при жизни не расстается с деньгами (с энергией). Но по завещанию он передает свое состояние сыновьям M' и M'' при условии, что они выделят для общества некую малую часть, меньшую одной тысячной всего имущества (энергии или массы). Сыновья владеют вместе несколько меньшим состоянием, чем владел отец (суммарная масса $M'+$ $+M''$ немного меньше, чем масса M радиоактивного атома). Но часть, переданная обществу, хотя и относительно мала, все же настолько огромна (если рассматривать ее как кинетическую энергию), что несет с собой большую угрозу зла. Предотвращение этой угрозы стало настоятельной проблемой современности.

Эта работа была написана Эйнштейном в 1946 году. Русский перевод статьи впервые был опубликован во II томе «Собрания научных трудов» Альберта Эйнштейна (М., «Наука», 1966).

Эйнштейн писал:

До конца жизни я буду думать о том, что такое свет[1]

◆

С тех пор, как за теорию относительности принялись математики, я ее уже сам больше не понимаю.

◆

Если вы хотите узнать у физиков-теоретиков что-нибудь о методах, которыми они пользуются, я советую вам твердо придерживаться следующего принципа: не слушайте, что они говорят, а лучше изучайте их работы

◆

Работать — значит думать. Поэтому точно учесть рабочий день не всегда легко. Обычно я работаю от четырех до шести часов в день. Я не слишком прилежен.

◆

Стыдно должно быть тому, кто пользуется чудесами науки, воплощенными в обыкновенном радиоприемнике, и при этом ценит их так же мало, как корова те чудеса ботаники, которые она жует.

◆

Открытие цепных атомных реакций так же мало грозит человечеству уничтожением, как изобретение спичек; нужно только сделать все для устранения возможности злоупотребления этим средством

Н. Вагутен

Арифметические препятствия

Во многих математических теориях и прикладных задачах, а также в математических *играх и головоломках* возникают вопросы такого рода: можно ли перейти от одной позиции к другой с помощью некоторых «допустимых» операций (ходов)? Как найти нужную цепочку *ходов, если она* существует, или доказать, что переход невозможен? В этой статье мы разберем несколько задач такого типа. Их объединяет еще и внешнее сходство: в каждой из них фигурируют целые числа, а «препятствия» переходам, как правило, имеют арифметическую природу.

Примеры, с которых начинается обсуждение каждой задачи, вполне доступны даже ученикам младших классов. Упражнения «со звездочкой» и доказательства общих результатов требуют от читателя серьезных размышлений. Заканчивается статья трудными олимпиадными задачами, последняя из которых примыкает к неэлементарной, бурно развивающейся сейчас теории арифметических групп.

1. Задача о коне

Задача 1. *Даны натуральные числа m и n. На одном из полей бесконечной шахматной доски стоит фигура, которая ходит «буквой Г» на m полей в одном из направлений и на n в перпендикулярном; назовем ее $\{m; n\}$-конем. На какие поля доски этот конь может попасть?*

Обычный шахматный конь ($\{1; 2\}$-конь) может из любого начального поля O попасть на любое другое: за три хода он может *попасть на соседнее с O поле*, а такими элементарными шагами можно, конечно, прийти куда угодно.

А вот $\{1; 3\}$-конь, несколько ходов которого показаны на рисунке 1, *никак не может попасть* на соседнее (по горизонтали) с начальным поле. На шахматной доске очень легко объяснить, что препятствует такому переходу: $\{1; 3\}$-конь всегда ходит *по полям одного цвета*. С другой стороны, нетрудно показать, что $\{1; 3\}$-конь может обойти все поля одного цвета: за три хода он может сдвинуться по диагонали на соседнее *поле того же цвета (рис. 1)*, а такими элементарными шагами уже легко обойти все одноцветные поля.

Попробуйте решить задачу 1 для чисел

а) 2 и 5; б) 3 и 7; в) 10 и 25; г) 19 и 79.

Оказывается, $\{m; n\}$-конь может попасть на любое поле в том и только том случае, когда m и n имеют *разную четность и их наибольший общий делитель равен 1.*

Полный ответ к задаче 1 приведен в конце пункта 3 (упражнение 10). Сейчас мы займемся более простым вопросом. *Результат, который мы получим,* полезен и для задачи о коне, и для более серьезных математических задач.

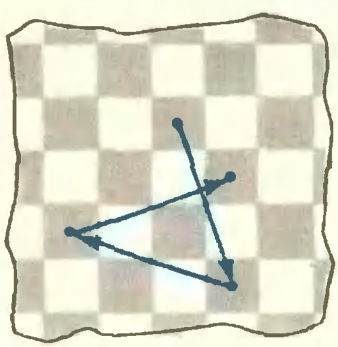


Рис. 1. $\{1; 3\}$-конь может попасть на соседнее (по диагонали) поле того же цвета; такими шагами он может обойти все одноцветные поля.

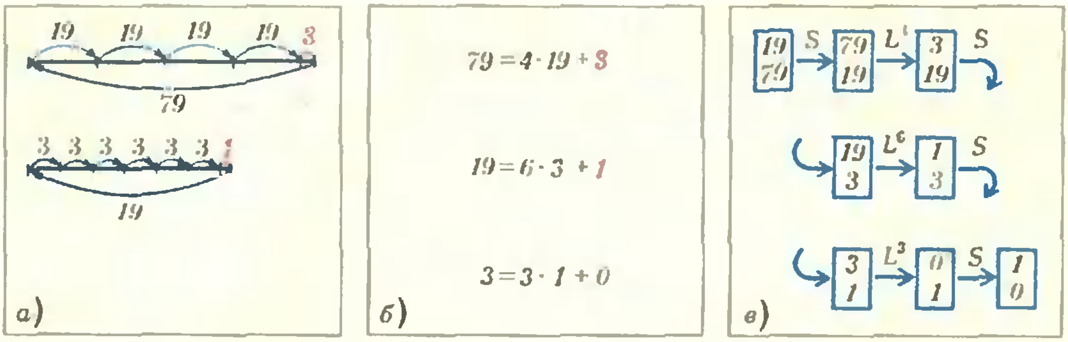


Рис. 2. Числа 19 и 79 взаимно просты, поэтому после нескольких делений с остатком получается остаток 1 = НОД (19, 79).

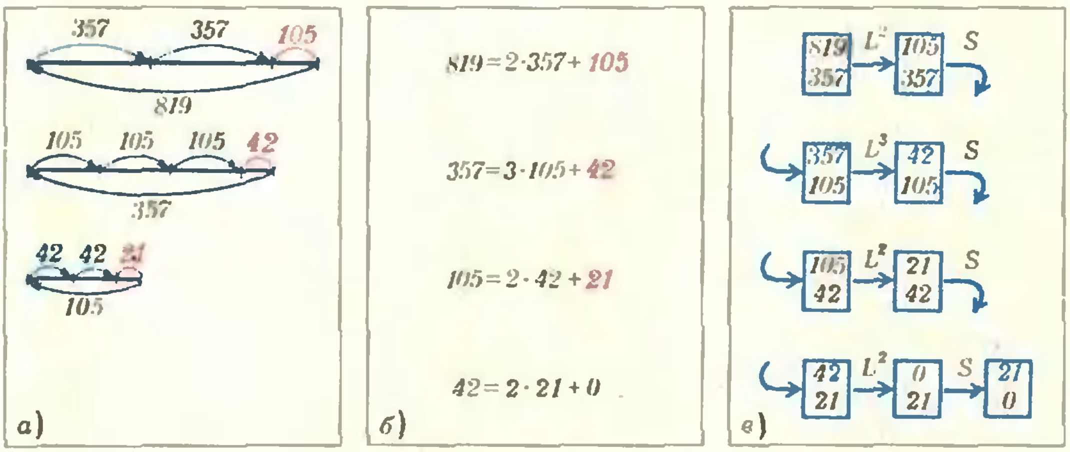


Рис. 3. Чтобы найти НОД (819, 357) = 21 с помощью алгоритма Евклида, надо сделать четыре шага.

2. Представление НОД

З а д а ч а 2. *Даны натуральные числа a и b. За один ход разрешается прибавить к некоторому целому числу одно из чисел a, b или вычесть из него одно из этих чисел. Можно ли таким образом из числа 0 получить число c?*

В этой задаче множество «позиций» — это множество **Z** всех целых точек числовой прямой.

Начнем с конкретного примера. Предположим, что у покупателя и кассира есть только купюры в 10 и 25 рублей, причем (чего не бывает в математических задачах!) в неограниченном количестве. Ясно, что покупатель может заплатить кассиру c рублей в том и только том случае, когда c кратно 5.

Еще пример. Пусть на множестве **Z** разрешены ходы ± 19 и ± 79. С помощью этих ходов можно получить любое целое число: их комбинация позволяет сдвинуться на расстояние 3, а затем и на расстояние 1 (рис. 2, *а*).

Более сложный пример: $a = 819$, $b = 357$. В этом случае тем же приемом удается найти кратчайший сдвиг — на 21 (рис. 3, *а*). Таким образом, здесь можно устроить переход на любое расстояние, кратное 21. С другой стороны, и a, и b делятся на 21, поэтому никакие другие переходы невозможны.

Заметим, что 21 — наибольший общий делитель чисел 819 и 357 (проверьте это!).

У п р а ж н е н и е 1. а) Докажите, что если у покупателя и кассира есть (в неограниченном количестве) трешки и пятерки, то покупатель может заплатить любое число рублей.

б) Можно ли перейти от 0 к 1000, если $a = 123$, $b = 456$? если $a = 589$, $b = 1984$?

в) Какие переходы возможны при $a = 18$, $b = 81$?

Теперь сформулируем ответ к задаче 2 в общем виде. *Пусть наиболь-*

ший общий делитель (НОД) чисел a и b равен d. Тогда переход от 0 к c возможен в том и только том случае, когда число c делится на d. Попробуйте доказать это.

В несколько иной форме мы получим этот результат в следующем пункте.

Упражнения

2. Докажите, что ответ к задаче 2 не изменится, если число a разрешается только прибавлять, а b — только вычитать.

3. Можно ли на чашечных весах с помощью гирь 36 г и 60 г (эти гири имеются в неограниченном количестве, и их можно класть на обе чашки весов) отвесить а) 150 г; б) 132 г?

3. Алгоритм Евклида

В следующей задаче позициями будут пары целых чисел.

Задача 3. *Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдает новую карточку: первый автомат, прочитав карточку с парой $(x;\ y)$, выдает карточку $(x-y;\ y)$, второй — карточку $(x+y;\ y)$, третий — карточку $(y;\ x)$.*

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(1;\ 2)$. *Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку* $(19;\ 79)$? $(819;\ 357)$?

Какие вообще карточки можно получить, если первоначально имеется карточка с парой чисел $(a;\ b)$?

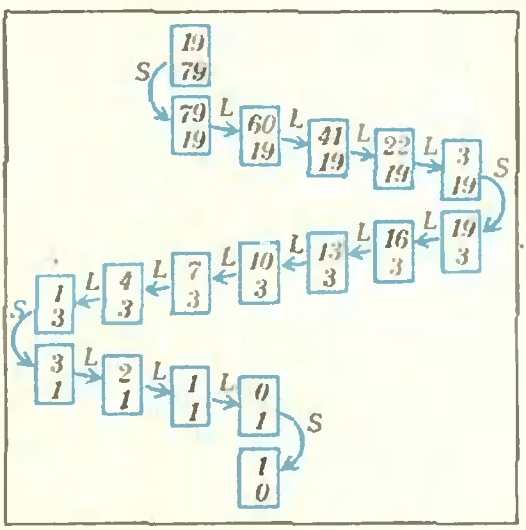


Рис. 4. Каждый «марш» этой лестницы — один шаг алгоритма Евклида.

Обозначим операции, которые проделывают автоматы, соответственно, через L, R и S. Начнем опять с числовых примеров.

Пару $(19;\ 79)$ из пары $(1;\ 2)$ операциями L, R, S получить можно. Чтобы осуществить нужный переход, удобнее не подниматься от $(1;\ 2)$ к $(19;\ 79)$, а спускаться в обратном направлении (рис. 4).

Записав получившуюся цепочку в обратном порядке (и, конечно, заменяя при этом L и R), получим «подъем» от $(1;\ 2)$ к $(19;\ 79)$.

На рисунке 4 «спуск» от $(19;\ 79)$ к $(1;\ 2)$ мы *продолжили до пары* $(1;\ 0)$; сокращенная запись этого «спуска» приведена на рисунке 2, *в* (L^k означает, что операция L проделывается k раз подряд). Собственно говоря, тот же спуск мы уже проделывали в соответствующем примере к предыдущей задаче (рис. 2, *а*).

Спуск, начинающийся с пары $(819;\ 357)$, сокращенно записан на рисунке 3, *в* — запишите его подробно. Здесь пара $(1;\ 2)$ (или $1;\ 0$) не получается. И не удивительно — тому есть препятствие: *все получаемые числа делятся на 21.* В каком бы порядке мы ни применяли операции L, R, S, избавиться от этого препятствия не удастся, поскольку, как нетрудно доказать, эти операции сохраняют общие делители чисел на карточке: НОД $(x-y,\ x)=$ НОД $(x+y,\ y)=$ НОД $(x,\ y)$. Поэтому перейти от пары $=(819;\ 357)$ к паре $(1;\ 2)$ или обратно нельзя.

Упражнение 4. Можно ли с помощью операций L, R, S перейти а) от пары $(1;\ 10)$ к паре $(5;\ 25)$? б) от $(18;\ 81)$ к $(36;\ 63)$? в) от $(589;\ 1984)$ к $(31;\ 1953)$?

Теперь мы можем сформулировать ответ на последний, общий вопрос задачи 3: *пару $(a;\ b)$ можно перевести в пару $(p;\ q)$ в том и только в том случае, когда* НОД $(a;\ b)=$ НОД $(p;\ q)$. Это условие необходимо, поскольку, как мы уже говорили, наши операции сохраняют НОД. Но оно также и достаточно: если НОД $(a,\ b)=$ НОД $(p,\ q)=d$, то каждую из этих *пар операциями L, R, S* можно привести к паре $(d;\ 0)$; проделав спуск от $(a;\ b)$ к $(d;\ 0)$ и затем подъем от $(d;\ 0)$ к $(p;\ q)$, мы получим цепочку от $(a;\ b)$ к $(p;\ q)$.

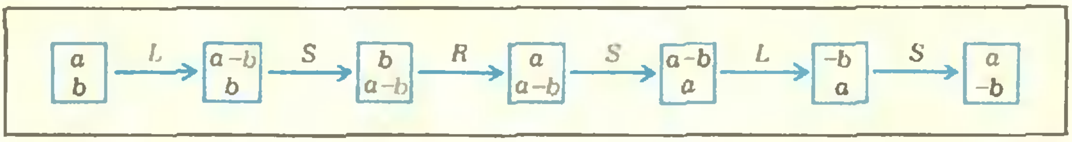


Рис. 5. Операциями L, R, S можно поменять знак у одного числа на карточке.

Покажем, почему от любой пары $(a; b)$ можно перейти к паре $(d; 0)$. Заметим, что если один из элементов пары отрицателен, то его легко сделать положительным (рис. 5). А пару $(a; b)$ с н а т у р а л ь н ы м и a и b можно привести к паре $(d; 0)$ тем же способом, который мы применили в примерах: на каждом шаге (кроме перестановок-симметрий) больший элемент пары уменьшается до тех пор, пока мы не придем к финалу $\to (d; d) \to \to (0; d) \to (d; 0)$.

Решая задачу 3, мы получили удобный способ отыскания наибольшего общего делителя двух чисел: от пары $(a; b)$, где $a > b > 0$, переходим к паре $(b; r)$, где r — остаток от деления a на b, и повторяем эту операцию до тех пор, пока не получим пару $(d; 0)$. *Последний не равный нулю остаток d и есть НОД $(a; b)$* (рис. 2, *б*, 3, *б*). Этот способ называется *алгоритмом Евклида*.

Упражнения

5. Докажите, что из пары (1357; 2468) нельзя получить пару (1234; 5678); из пары (123; 457) нельзя получить (7890; 1979).

6. Приведите примеры, показывающие, что операции задачи 3 не перестановочны: $LS \neq SL$, $RS \neq SR$ (разумеется, $LR = RL$).

7. Найдите с помощью алгоритма Евклида НОД (589, 1984), НОД (123456789, 987654321).

Целочисленной решеткой $\mathbf{Z}^2$ называется множество всех точек плоскости с целыми координатами.

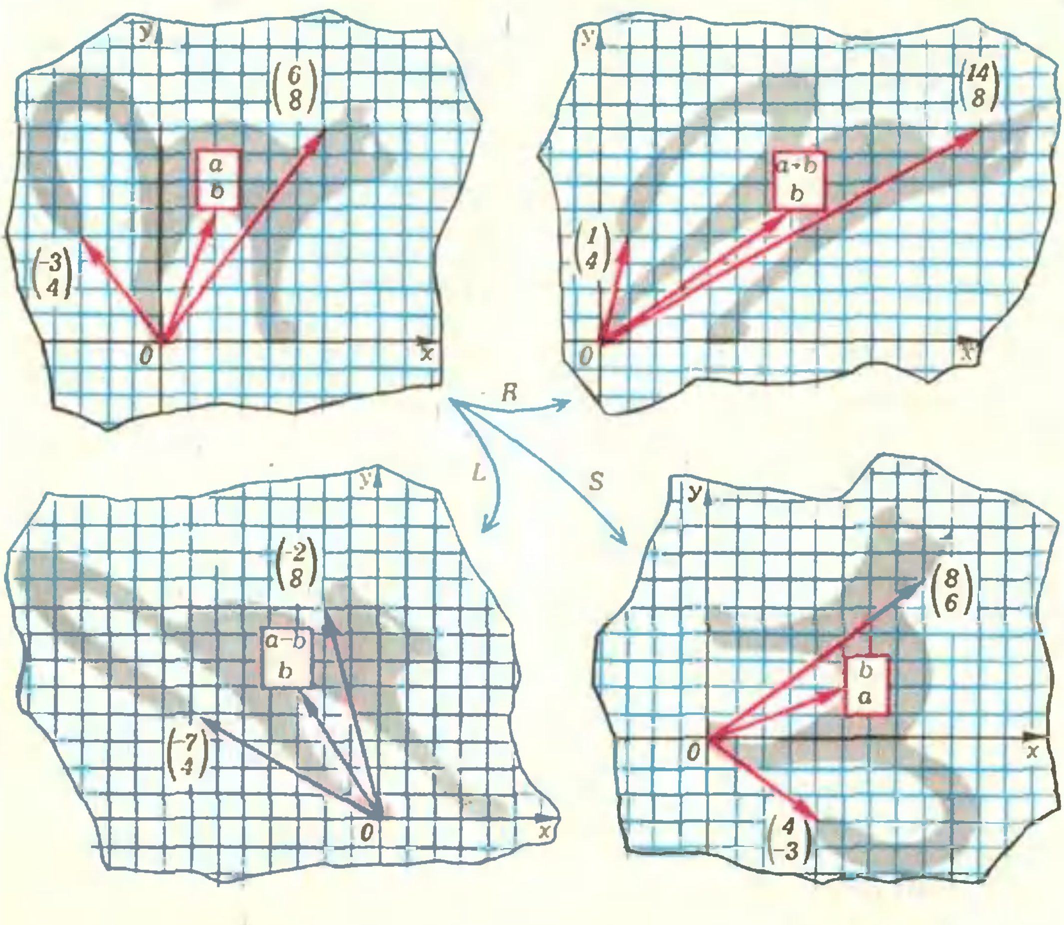


Рис. 6. «Левый перекос» $L\,(x;\ b) \to (x-b;\ b)$, «правый перекос» $R\,(x;\ b) \to (x+b;\ b)$, «симметрия» $S\,(x;\ b) \to (b;\ x)$ — линейные преобразования плоскости, осуществляющие взаимно однозначные отображения целочисленной решетки $\mathbf{Z}^2$ на себя.

Следующее упражнение и рисунок 6 проясняют геометрический смысл задачи 3:

8. Докажите, что если отрезок OA, где O — начало координат, A — узел целочисленной решетки Z^2, разбивается другими узлами на d частей, то операциями L, R и S узел A можно перевести в узлы $(d; 0)$ и $(-d; 0)$ и нельзя перевести ни в какие другие точки оси Ox.

Упражнения 9 и 10 обобщают задачи 1 и 2:

9*. Пусть заданы n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что целое число c можно получить из 0 ходами $\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_n$ тогда и только тогда, когда c делится на НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

10*. а) Пусть на плоскости Oxy заданы n векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ с целочисленными координатами. Докажите, что множество точек D плоскости, в которые можно попасть из точки O ходами $\pm\vec{v}_1, \pm\vec{v}_2, \ldots, \pm\vec{v}_n$, представляет собой множество вершин некоторой косоугольной решетки (так называется множество вершин параллелограммов, на которые два семейства равноотстоящих параллельных прямых разрезают плоскость).

б) Пусть вместе с каждым вектором $\vec{v}_i$ в семействе векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ имеется равный ему по длине и перпендикулярный. Тогда множество «достижимых» точек D будет множеством вершин некоторой квадратной решетки.

Теперь уже нетрудно найти ответ к задаче 1: пусть $m=dm_1$, $n=dn_1$, где $d=$НОД (m, n); тогда, если m_1+n_1 нечетно, достижимы все поля $(dx; dy)$, где x и y — произвольные целые числа (решетка с шагом d); если же m_1+n_1 четно — поля $(dx; dy)$, где $x \in Z$, $y \in Z$ и $x+y$ четно (решетка с шагом $d\sqrt{2}$, повернутая на угол 45° по отношению к линиям доски).

4. Некоторые итоги

В заключительной части статьи мы познакомим вас еще с двумя довольно трудными задачами. Но прежде, оглянувшись назад, попробуем высказать общие соображения, которые помогли нам — и помогут в дальнейшем — выяснять, возможен ли переход от одной «позиции» к другой, и назовем математические «имена» тех понятий, которые встретились нам в задачах.

1°. Чтобы доказать н е в о з м о ж н о с т ь того или иного перехода, мы обнаруживали некоторое п р е п я т с т в и е — характеристику позиции, сохраняющуюся (как говорят, *инвариантную*) при всех допустимых ходах, но различную для начальной и конечной позиций; таким образом, доказательство невозможности того или иного перехода сводилось к отысканию подходящего *инварианта*. Таким инвариантом в задаче о {1; 3}-коне является цвет поля, в задаче 2 — остаток от деления числа на НОД (a, b), в задаче 3 — НОД пары чисел на карточках. Подробнее об этом можно прочесть в «Кванте» 1974, № 2 (с. 26), 1976, № 2 (с. 32) и 1976, № 12 (с. 19).

2°. Чтобы построить цепочку переходов на решетке, часто бывает полезно найти какой-то элементарный «ключевой» ход (или комбинацию ходов), либо свести дело к какой-то простейшей *канонической* позиции,— а затем уже сформулировать общее правило (алгоритм) отыскания переходов. Так, в задаче о {1; 3}-коне достаточно научиться делать ход по диагонали, в задаче 2 — сдвиг на $d=$НОД (a, b), в задаче 3 — «спуск» к канонической позиции $(d; 0)$.

3°. Во всех рассмотренных пока задачах переходы были о б р а т и м ы: если от позиции A можно было перейти к позиции B, то можно было вернуться и обратно — от B к A. В таких задачах все множество позиций разбивается на *классы эквивалентности:* внутри одного класса от каждой позиции можно перейти к любой другой, а никакие переходы между позициями из различных классов невозможны.

Сейчас мы рассмотрим задачу, в которой такой обратимости нет, но зато в ней прекрасно работают соображения 1° и 2°

5. Избавление от двоек

З а д а ч а 4. *Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом: первый автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $(a+1; b+1)$; второй автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $(a/2; b/2)$ (он работает только в том случае, когда оба числа a и b четны); третий автомат по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдает карточку $(a; c)$.*

Пусть первоначально имеется карточка с парой чисел (5; 19). Можно ли, используя автоматы в *любом порядке, получить карточку а) (1; 50)? б) (1; 100)?*

в) Пусть первоначально имеется карточка (a; b), a<b, а мы хотим получить карточку (1; n). При каких n это можно сделать?

Эта задача предлагалась на XII Всесоюзной математической олимпиаде ученикам 8—10 классов*). Впрочем, даже пятиклассникам хватит знаний, чтобы решать ее.

Обозначим операции, которые выполняют наши новые автоматы, соответственно, через I, H и T. На рисунке 7 показано, как из карточки (5; 19) получить «простейшую» карточку (1; 8) и затем — карточку (1; 50) (вместо «k раз применить операцию I» мы снова пишем I^k). Таким образом, в задаче а) ответ у т в е р д и т е л ь н ы й.

А вот карточку (1; 100), про которую спрашивается в задаче б), из карточки (5; 19) получить не удастся. Препятствие можно обнаружить, внимательно изучив тот же рисунок 7: *разность чисел на каждой карточке делится на 7*. В каком бы порядке мы ни применяли автоматы, избавиться от этого свойства не удастся — его сохраняют операции I, H и T. (Для I это очевидно. Для H: если a и b — четные и $b—a$ делится на 7, то и $b/2—a/2$ делится на 7. Для T: если разности $b—a$ и $c—b$ делятся на 7, то и $c—a=(c—b)+(b—a)$ делится на 7.) Но разность $100—1=99$ на 7 не делится, так что ответ к б) о т р и ц а т е л ь н ы й.

У п р а ж н е н и е 11. Можно ли, используя автоматы I, H и T, а) из карточки (3; 33) получить карточки (5; 29), (1; 101), (1; 1978)?

б) Из карточки (5; 29) получить (3; 33), (1; 100), (1; 1979)?

Сформулируем теперь ответ на последний, общий вопрос в) задачи 4: *из карточки (a; b), в которой $b—a=2^m d$, где $d>0$ и нечетно, можно получить те и только те карточки (p; q), в которых разность $p—q>0$ делится на d.* Таким образом, можно избавиться от всех д в о е к в разложении $b—a$, но н е ч е т н ы й делитель разности $b—a$ служит непреодолимым препятствием.

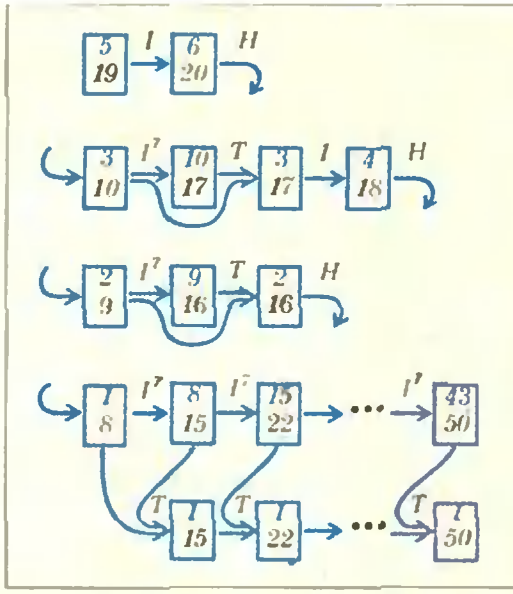


Рис. 7. С помощью операций I^q (увеличение на q), H (деление пополам), T («транзитивный» переход) из $\begin{array}{|c|}\hline 5\\ 19\\ \hline\end{array}$ получаем $\begin{array}{|c|}\hline 1\\ 50\\ \hline\end{array}$

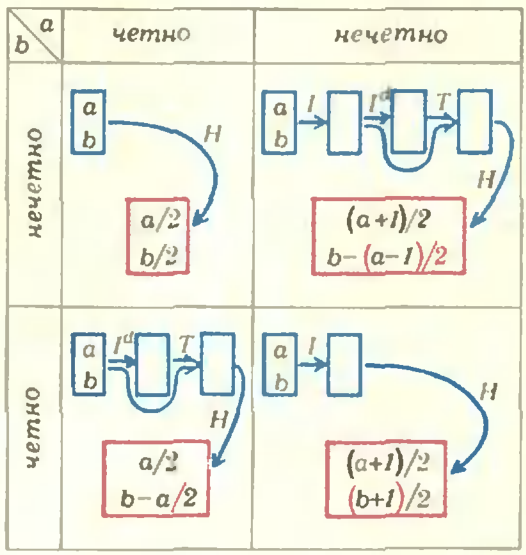


Рис. 8. Большее число b на карточке $\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline\end{array}$ можно уменьшить ($d=b—a$; $a>1$ или $a=1$, b нечетно).

В самом деле, как мы уже говорили (для $d=7$), из карточек, у которых разность делится на нечетное число d, с помощью операций I, H, T получаются только карточки, обладающие тем же свойством. С другой стороны, от карточки $(a;\ b)$, где $b—a=2^m d$ (d нечетно), можно перейти к карточке $(1;\ d+1)$. (Один шаг такого перехода показан на рисунке 8.) Получив карточку $(1;\ d+1)$, легко изготовить любую карточку $(1;\ kd+1)$ (как

*) См. также задачу М516 из Задачника «Кванта» («Квант», 1978, № 8).

в задаче а) — из карточки (1; 8)) и затем — любую карточку (l; $kd+l$) с разностью чисел, кратной d.

Упражнения

12. а) Предположим, что автомат, выполняющий операцию T, сломался. Какие карточки можно получить из (5; 19)? (5; 29)?

б) Пусть сломался автомат, выполняющий операцию H. Какие карточки можно получить из карточки (a; b)?

13*. Какие карточки можно получить операциями I, H, T из n данных карточек (a_1; b_1), (a_2; b_2),…,(a_n; b_n)?

Задача 4 выглядит довольно искусственной. Поэтому, возможно, вам будет интересно узнать, что она возникла из леммы в одной серьезной математической книге (С. Улам, «Нерешенные математические задачи», М., «Наука», 1964, с. 60).

6. Пары векторов

Следующая задача продолжает задачу 3*). Здесь фигурируют те же три операции L, R и S, но в задаче 3 они применялись к парам целых чисел, а теперь «позициями» будут пары векторов (a; b) и (c; d) с целыми координатами, и эти операции будут применяться одновременно к обоим векторам пары. Координаты обоих векторов удобно записывать в два столбика — получится табличка $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ из четырех чисел; такие таблички в математике называются *матрицами*.

Задача 5. *С матрицей $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ разрешается проделывать следующие операции:*

$$L:\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$R:\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$S:\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}.$$

Можно ли этими операциями из матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ получить следующие матрицы: а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

Какие вообще матрицы можно получить из данной матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$?

Будем называть две матрицы *эквивалентными*, если одну из них операциями L, R и S можно перевести в другую (здесь переходы обратимы, так что все матрицы разбиваются на классы эквивалентных).

В решении очень трудной задачи 5 нам встретится несколько препятствий. Будем преодолевать их последовательно.

а) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ не эквивалентны; второй вектор $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ никак нельзя перевести в $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, поскольку НОД (5, 7)$\neq$НОД (3, 9). Вообще, из результата задачи 3 сразу вытекает условие, необходимое для эквивалентности двух матриц

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}:$$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(p, q), \\ \text{НОД}(c, d) = \text{НОД}(r, s). \end{cases} \qquad (*)$$

Однако, как мы сейчас увидим, это условие не достаточно для эквивалентности матриц. Во всяком случае, если это условие выполнено, мы можем разделить каждый столбец матрицы на его НОД и далее рассматривать такие *сокращенные* матрицы (ведь НОД каждого столбца сохраняется при всех операциях) *).

б) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ не эквивалентны, потому что при любом преобразовании L, R, S из матрицы

*) Вместе они составляют содержание задачи М420 из Задачника «Кванта» («Квант», 1976, № 12), решение которой еще не публиковалось.

*) Термин «сокращенная» естественно возникает, если смотреть на матрицу $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ как на пару дробей $\left(\frac{a}{b};\ \frac{c}{d}\right)$ (как в условии задачи М420).

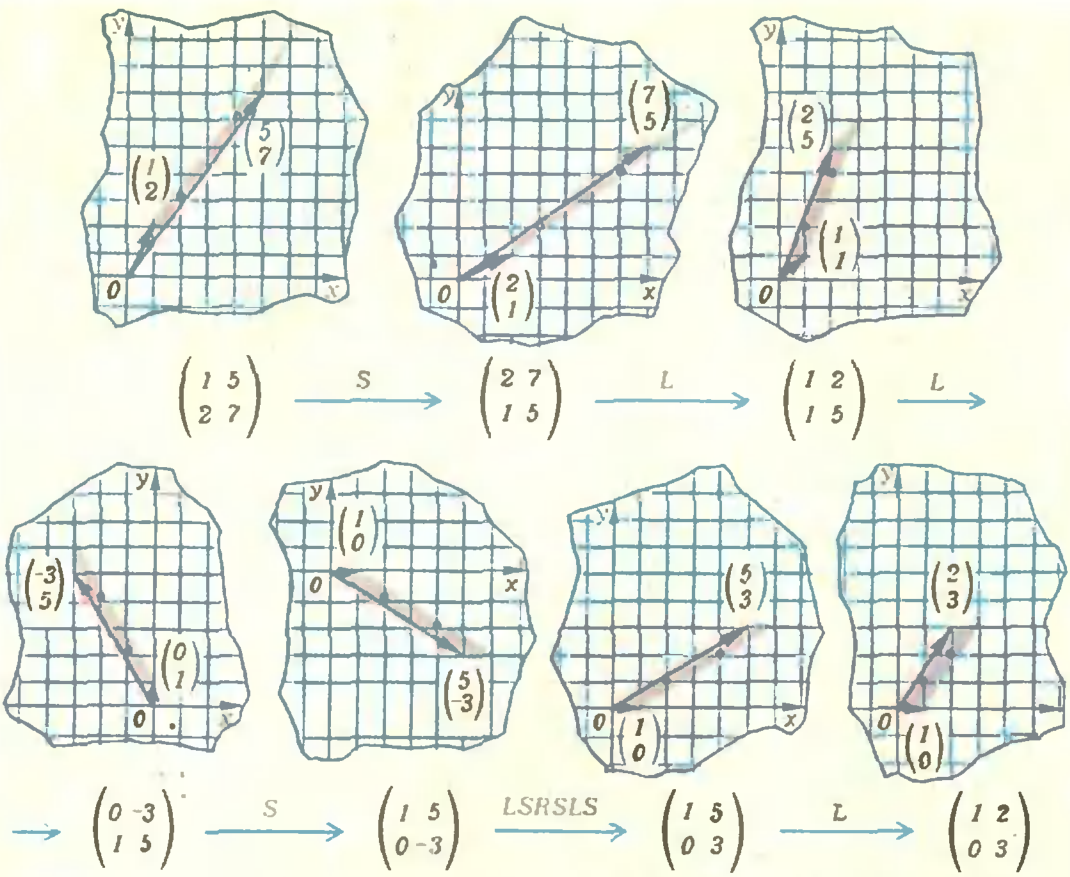


Рис. 9. Приведение к каноническому виду. При всех преобразованиях L, R, S сохраняется площадь параллелограмма и расположение узлов целочисленной решетки внутри него.

$\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ получится матрица с одинаковыми столбцами $\begin{pmatrix}p&p\\q&q\end{pmatrix}$.

в) Матрицы $\begin{pmatrix}1&5\\2&7\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ тоже не эквивалентны; тут возникает новое препятствие: величина

$$\Delta=\Delta\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=|ad-bc|.$$

Она сохраняется при всех преобразованиях L, R, S матрицы $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$. Проверим это для L: $(a-b)d-b(c-d)=ad-bc$. (Для R и S проведите проверку сами.) Поскольку $\Delta\begin{pmatrix}1&5\\2&7\end{pmatrix}=3$, а $\Delta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1$, эти матрицы не эквивалентны. Заметим, что

$$\Delta\begin{pmatrix}p&p\\q&q\end{pmatrix}=0.$$

Величина $ad-bc$ очень часто возникает в разных задачах про матрицы и называется *определителем* матрицы $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$.

г) Матрицы $\begin{pmatrix}1&5\\2&7\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ эквивалентны: цепочка преобразований, приводящих первый вектор $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ к каноническому виду $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, и небольшие дополнительные ухищрения приводят к цели (рис. 9). На рисунке 9 хорошо виден и наш инвариант Δ: это — п л о щ а д ь параллелограмма, построенного на векторах $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$.

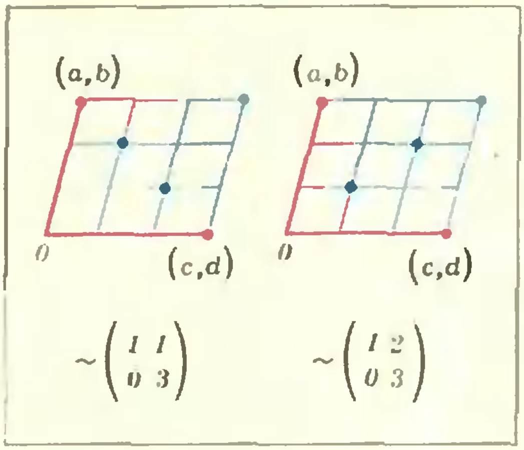


Рис. 10. В параллелограммах для матриц $\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ расположение узлов целочисленной решетки различно.

Осталось еще выяснить,

д) эквивалентны ли матрицы $\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$. Оказывается, н е т, хотя указать препятствие здесь не так просто. Его геометрический смысл ясен из рисунков 9 *и* 10.

Теперь мы можем дать ответ на общий вопрос задачи 5. Любую сокращенную матрицу операциями L, R, S *можно преобразовать к каноническому виду*

$$\begin{pmatrix}1&r\\0&\Delta\end{pmatrix},\quad \text{где } 0\leqslant r<\Delta,\qquad (1)$$
$$\text{НОД}(r,\Delta)=1,$$

или

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\ (\text{если } \Delta=0).\qquad (2)$$

Две матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены условия (*) *и соответствующие сокращенные матрицы имеют один и тот же канонический вид.* (Несколько иначе критерий эквивалентности сформулирован в *упражнении 20.*)

В самом деле, любую сокращенную матрицу можно преобразовать к каноническому виду так же, как раньше мы преобразовали матрицу $\begin{pmatrix}1&5\\2&7\end{pmatrix}$ (см. рис. 9). Тот факт, что r является инвариантом, вытекает из упражнений 14, 15.

Упражнения

14*. *Пусть матрица* $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ имеет канонический вид (1). Тогда внутри параллелограмма $OABC$, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}=(a;\ b)$ и $\overrightarrow{OC}=(c;\ d)$, лежит $\Delta-1$ целая точка. Все эти точки M_1, $M_2,\ldots,M_{\Delta-1}$ могут быть получены при помощи векторных равенств:

$$\overrightarrow{OM_j}=\{j/\Delta\}\,\overrightarrow{OC}+\{j(1-r/\Delta)\}\,\overrightarrow{OA},$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x.

15. Пусть НОД $(a,\ b)=$ НОД$(c,\ d)=1$, $\Delta=|ad-bc|\neq0$. Тогда существует единственное r такое, что $0\leqslant r<\Delta$, НОД$(r,\Delta)=1$ и оба числа $ra-c$, $rb-d$ делятся на Δ, причем это r сохраняется при преобразованиях L, R, S матрицы $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$.

Это упражнение удобно для конкретных вычислений числа r, если Δ невелико.

16. Какие матрицы среди следующих эквивалентны, а какие — нет:

$$\begin{pmatrix}5&1\\7&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-5\\2&7\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\3&9\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&3\\4&8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&7\\5&8\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}6&14\\17&39\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5&13\\19&50\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}19&1\\79&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}39&60\\50&77\end{pmatrix}?$$

17. *Выше мы не рассматривали матрицы, у которых один из столбцов нулевой. В каком случае такие матрицы эквивалентны?*

18. Докажите, что любые две матрицы, *у которых* $\Delta=1$, эквивалентны.

19*. Сколько существует всего классов неэквивалентных матриц с $\Delta=3$, $\Delta=4$, $\Delta=5$, $\Delta=10$, $\Delta=12$? Сколько среди них сокращенных? Нарисуйте для каждого класса матриц расположение узлов в соответствующем параллелограмме (как на рисунке 10).

20. Докажите, что для любой матрицы существует единственная эквивалентная ей матрица $\begin{pmatrix}k&l\\0&m\end{pmatrix}$, где $k\geqslant0$, $m\geqslant0$, $l\geqslant0$ и $l<m$ при $m\neq0$.

Другой возможный подход к задачам 3 и 5 — выяснить, какие вообще преобразования целочисленной решетки можно получить композициями операций L, R, S (подобно тому, как в задаче 2 мы выяснили, какие вообще сдвиги можно получить композициями сдвигов $\pm a$, $\pm b$). Оказывается, все эти преобразования решетки имеют вид $(x;\ y)\to(ax+by;\ cx+dy)$, где a, b, c, d — целые числа и $|ad-bc|=1$. Но это уже — тема отдельной статьи, посвященной линейной алгебре.

Победители конкурса «Кванта»

В прошлом году редакция получила свыше 12 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Ниже публикуется список школьников — победителей нашего конкурса решения задач.
В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников победители получили право участвовать в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1979 года.

Математика

К. АБДУХАЛИКОВ — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
А. АГАЕВ — с. Покровка АзССР, 9 кл.
В. АЙРИЯН — г. Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
А. БАДАЛЯН — пос. Берд АрмССР, 10 кл.
А. БАЛИНСКИЙ — г. Львов, с. ш. № 11, 9 кл.
В. БОЛОТНИКОВ — г. Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
О. ГОРДИЕНКО — г. Павлодар, с. ш. № 3, 10 кл.
М. ГОРЕЛОВ — г. Белорецк, с. ш. № 14, 10 кл.
Г. ГРАБАРНИК — г. Ташкент, с. ш. № 110, 10 кл.
В. ГУБА — г. Вологда, с. ш. № 8, 10 кл.
О. ДМИТРИЕВ — г. Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Р. ИЗМАЙЛОВ — г. Баку, с. ш. № 134, 10 кл.
Ф. КАБДЫКАИРОВ — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
А. КАПЛАН — г. Сумгаит, с. ш. № 11, 9 кл.
Г. КАРАГУЛЯН — г. Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
А. КЕЛАРЕВ — г. Свердловск, с. ш. № 141, 9 кл.
С. КУЗНЕЦОВ — г. Ангарск, с. ш. № 10, 10 кл.
Е. КУЗЬМИН — г. Череповец, с. ш. № 4, 10 кл.
А. КУЛЕСКО — г. Донецк, шк.-инт. № 10, 10 кл.
Ю. ЛАПУСТА — г. Тернополь, с. ш. № 3, 10 кл.
Р. МЕШОЙРЕР — г. Москва, с. ш. № 444, 10 кл.
Д. МИНДЛИН — г. Ташкент, с. ш. № 5, 10 кл.
Б. НАДЕЖДИН — г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
С. НОВИКОВ — г. Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.
А. ОПАРИН — г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
А. ПОПЕЛЮХИН — г. Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.
М. СЕВРЮК — г. Москва, с. ш. № 2, 10 кл.
Ф. СУКОЧЕВ — г. Ташкент, с. ш. № 103, 10 кл.
О. ТАВГЕНЬ — г. Минск, с. ш. № 54, 10 кл.
К. ТАТАЛЯН — г. Ереван, с. ш. № 8, 10 кл.
В. УМАНСКИЙ — г. Баку, с. ш. № 134, 10 кл.
С. ХОСИД — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.

Физика

А. БАРЗЫКИН — пос. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
М. ГАВРИЛОВ — пос. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
К. ЖУКОВ — г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Е. ЗУДИН — г. Александров, с. ш. № 4, 10 кл.
В. ЛАШКИН — г. Киев, с. ш. № 96, 10 кл.
Д. ЛЮДМИРСКИЙ — г. Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. МОГИЛЬНЕР — г. Свердловск, с. ш. № 105, 10 кл.
И. ОМЕЛЯН — г. Львов, с. ш. № 11, 10 кл.
Т. ПАВЕЛКИНА — г. Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
С. ПРЯДКИН — г. Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
И. РОМАНОВСКИЙ — г. Лида, с. ш. № 1, 10 кл.
С. ШИШКОВ — г. Москва, с. ш. № 179, 9 кл.
М. ЭФРОИМСКИЙ — г. Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.

Задачник Кванта

Задачи

М551—М555; Ф563—Ф567

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М551, М552» или «Ф563». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).
Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).
В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М551. а) Какое наименьшее число точек достаточно отметить внутри выпуклого пятиугольника, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах пятиугольника содержалась хотя бы одна отмеченная точка?

б)* Тот же вопрос для выпуклого n-угольника.

Московская городская математическая олимпиада

М552. а) Найдите хотя бы одну пару (p, q) целых чисел, отличных от нуля, для которой трехчлены x^2+px+q и x^2+qx+p имеют целые корни.

б) Найдите все такие пары (p, q).

Э. Туркевич

М553*. Дан треугольник ABC, причем $|BC|<|AC|<|AB|$. На лучах BA и CA отложены отрезки BD и CE такие, что $|BD|=|CE|=|BC|$. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ADE, равен расстоянию между центрами окружности, описанной около треугольника ABC, и окружности, вписанной в него.

С. Мейдман

М554*. Назовем натуральное число n *хорошим*, если существуют такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (не обязательно различные), что

$$a_1+a_2+\ldots+a_k=n,$$

и

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}=1.$$

Известно, что все числа между 33 и 73 — хорошие. Докажите, что все числа, большие 73, — тоже хорошие.

Математическая олимпиада США (1978 г.)

М555. Рассмотрим пересечение

а) двух;

б) трех

цилиндров одинакового радиуса r, оси которых взаимно перпендикулярны и проходят через одну точку. Сколько плоскостей симметрии имеет это пересечение? Каков его объем?

С. Пухов

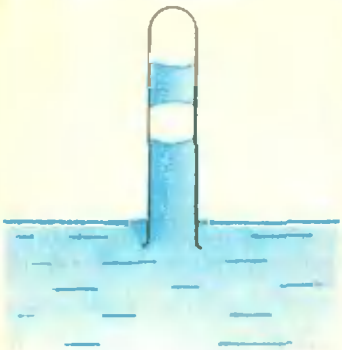


Рис. 1.

Ф563. Посередине барометрической трубки имеется столбик воздуха (рис. 1). Площадь сечения трубки $s = 0{,}3$ см^2. При температуре $t = 0$°С длина столбика равна $l_0 = 10$ см. Какой станет длина этого столбика при $t = 20$°С?

Ф564. Автомобиль движется по повороту дороги радиуса R. Внезапно водитель увидел на дороге препятствие и начал тормозить. Какое расстояние автомобиль пройдет до остановки, если его скорость равна v_0, коэффициент трения колес о дорогу k и автомобиль тормозит с максимально возможным постоянным ускорением?

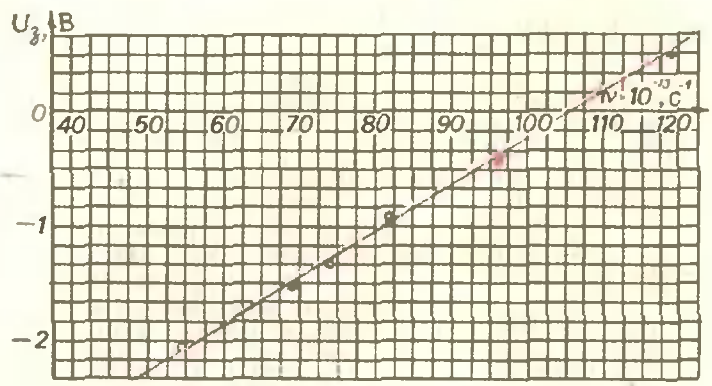


Рис. 2.

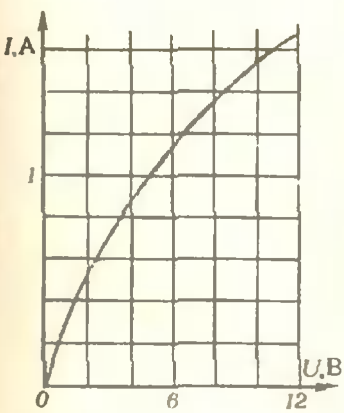


Рис. 3.

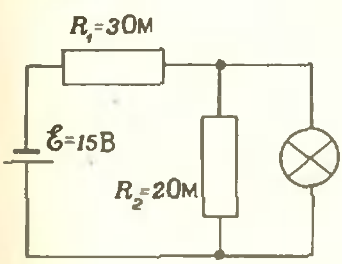


Рис. 4.

Ф565. На рисунке 2, взятом из работы Милликена, приведена зависимость задерживающего напряжения от частоты света в опытах по фотоэффекту. Определить из этого графика отношение постоянной Планка h к заряду электрона e.

Ф566. Атом, движущийся со скоростью v ($v \ll c$), испускает фотон под малым углом α к направлению своего движения. Доказать, что если ω_0 — частота излучения покоящегося атома, а ω — частота волны фотона, то для видимого света $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \approx$ $\approx \frac{v}{c} \cos\alpha$ (формула Доплера).

Ф567. На рисунке 3 приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку включают в цепь, показанную на рисунке 4. Найти мощность, выделяющуюся на лампочке.

Решения задач

М504, М506, М507; Ф513, Ф516, Ф517

М504. *На шахматную доску $n\times n$ клеток уложено k плиток размером 2×1, причем так, что положить $(k+1)$-ю плитку, не перемещая уже имеющихся плиток, нельзя. Докажите, что свободных клеток осталось не более чем*

а) $(n^2+n+1)/3$;

б) $(n^2+2)/3$;

в) $n^2/3$.

Можно ли получить для некоторых n еще более точную оценку?

Рис. 1.

Рис. 2.

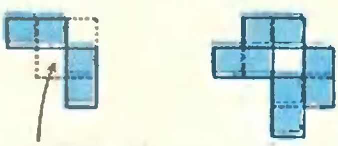


Рис. 3.

Рис. 4.

Пусть свободных клеток x.

а) Сопоставим каждой свободной клетке, не лежащей на верхней горизонтали доски, плитку, «накрывающую» ее сверху (рис. 1). Ясно, что каждая плитка сопоставлена не более чем одной клетке (так что количество свободных клеток, не лежащих на верхней горизонтали доски, не больше общего количества $\frac{n^2-x}{2}$ плиток, уложенных так, как сказано в задаче). Пусть на верхней горизонтали доски x_1 свободных клеток; тогда $x_1\leqslant\frac{n+1}{2}$. Имеем

$$x-x_1\leqslant\frac{n^2-x}{2},$$

то есть

$$3x\leqslant n^2+2x_1\leqslant n^2+n+1,$$

откуда

$$x\leqslant(n^2+n+1)/3.$$

б) Обозначим через x_1 количество свободных клеток *внутри* доски, через x_2 — количество свободных клеток *на границе* доски, не считая угловых клеток; наконец, через x_3 обозначим количество свободных *угловых* клеток доски. Тогда $x=x_1+x_2+x_3$. Через y_1 обозначим количество расположенных строго внутри доски п л и т о к; через y_2 — количество плиток, выходящих на края доски хотя бы одной клеткой; тогда $y_1+y_2=\frac{n^2-x}{2}$.

Подсчитаем, сколько имеется п а р: *свободная клетка — граничащая с ней плитка*. С одной стороны, их $4x_1+$ $+3x_2+2x_3$. С другой стороны, поскольку плитки уложены так, что добавить ни одной уже нельзя, этих пар не более чем $4y_1+3y_2$ (каждая плитка, выходящая на край доски, граничит не более чем с тремя клетками, а каждая плитка строго внутри доски — не более чем с четырьмя). Поэтому

$$4x_1+3x_2+2x_3\leqslant 4y_1+3y_2. \qquad (1)$$

Поскольку каждые две свободные клетки на границе доски разделяются плиткой, имеем

$$x_2+x_3\leqslant y_2. \qquad (2)$$

Складывая неравенства (1) и (2), получаем

$$4x_1+4x_2+3x_3\leqslant 4(y_1+y_2),$$

или

$$x-\frac{1}{4}x_3\leqslant\frac{n^2-x}{2}.$$

Но $x_3\leqslant 4$; значит, $x\leqslant\frac{n^2-x}{2}+1$ или $3x\leqslant n^2+2$, откуда $x\leqslant(n^2+2)/3$.

в) Заметим, что если неравенство (1) — с т р о г о е, то мы получим то, что надо в пункте в): строгое неравенство $x<\frac{n^2-x}{2}+1$ равносильно такому нестрогому: $x\leqslant\frac{n^2-x}{2}$, откуда $x\leqslant\frac{n^2}{3}$. Поэтому, если допустить, что $x>\frac{n^2}{3}$, то во всяком случае нужно, чтобы к каждой плитке обязательно прилегало максимально возможное число свободных клеток. В частности, к любой стороне плитки длины 1, не упирающейся в край доски, должна прилегать свободная клетка. Поэтому плитки должны располагаться «рядами» (рис. 2), причем «ряды» не могут ни упираться друг в друга, ни пересекаться друг с другом, поскольку и в том и другом случае возникает картинка, изображенная на рисунке 3,— до тех пор, пока не достигнем края. Значит, все «ряды» должны быть параллельны, что возможно лишь тогда, когда n делится на 3. В этом случае число плиток равно $n^2/3$ (соответствующий пример изображен на рисунке 4). Итак, для досок $n\times n$, где $n=3k$, оценка $\frac{n^2}{3}$ — точная.

С. Фомин

◆

M506. *Докажите, что для положительных a, b, c и d справедливо неравенство:* $a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd\geqslant a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$. Сложив три очевидных неравенства

$$a(a-b)(a-c)(a+2d)\geqslant 0,$$
$$a(a-b)(a+2c)(a-d)\geqslant 0,$$
$$a(a+2b)(a-c)(a-d)\geqslant 0,$$

получим

$$3a^4-3a^2(bc+bd+cd)+6abcd\geqslant 0,$$

или

$$a^4-a^2(bc+bd+cd)+2abcd\geqslant 0. \qquad (1)$$

С другой стороны, неравенство

$$b^4+c^4+d^4-a^2(b^2+c^2+d^2-bc-bd-cd)-b^2c^2-b^2d^2-c^2d^2\geqslant 0 \qquad (2)$$

эквивалентно очевидному

$$[(b+c)^2-a^2](b-c)^2+[(b+d)^2-a^2](b-d)^2+[(c+d)^2-a^2](c-d)^2\geqslant 0.$$

Сложив неравенства (1) и (2), получим утверждение задачи.

Приведем решение этой задачи, использующее математический анализ. Нам понадобится следующая геометрически очевидная

Лемма. *Если функция f имеет неотрицательную производную в каждой точке луча $[x_0;+\infty[$, то она — неубывающая на этом луче.*

Заметим, что *если какие-то два из чисел a, b, c, d совпадают, то доказываемое неравенство справедливо.* В самом деле, пусть например, $a=d$. Тогда наше неравенство можно переписать так:

$$a^4+2(bc-b^2-c^2)a^2+b^4+c^4-b^2c^2\geqslant 0. \qquad (3)$$

Левая часть неравенства (3) — квадратный трехчлен относительно a^2 с неположительным дискриминантом $-2bc(b-c)^2$, поэтому (3) справедливо.

Перепишем теперь требуемое неравенство в таком виде:

$$d^4-(a^2+b^2+c^2)d^2+2abcd+a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2\geqslant 0 \qquad (4)$$

и рассмотрим левую часть (4) как функцию от d; обозначим эту функцию через f. Нам нужно доказать, что $f(d)\geqslant 0$ при $d\geqslant c$ (и $0<a\leqslant b\leqslant c$). Имеем:

$$f'(d)=4d^3-2(a^2+b^2+c^2)d+2abc,$$

так что $f'(c)=2c^3-2(a^2+b^2)c+2abc\geqslant 0$ $(0<a\leqslant b\leqslant c)$.

Далее,

$$f''(d)=12d^2-2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 0$$

при $0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$. Поэтому по лемме $f'(d)\geqslant f'(c)\geqslant 0$ при $d\geqslant c$. Используя то, что $f(c)\geqslant 0$ (см. замечание выше) и $f'(d)\geqslant 0$ при $d\geqslant c$, и снова применяя лемму, получим неравенство $f(d)\geqslant 0$ при $d\geqslant c$, которое и требовалось.

Интересное обобщение этого неравенства придумал *Ф. Шлейфер* (Рязань): для любых $a_1, \ldots, a_n$

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+n\sqrt[n]{a_1^2\cdot a_2^2\cdot\ldots\cdot a_n^2}\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2.$$

При $n=4$, $a_1=a^2$, $a_2=b^2$, $a_3=c^2$, $a_4=d^2$ получим утверждение нашей задачи.

В. Сендеров, Э. Туркевич

М507. *Пусть $a_1<a_2<\ldots<a_n<$ $<2n$ — конечная последовательность натуральных чисел ($n\geqslant 6$).*

а) Докажите, что

$$\min[a_i, a_j]\leqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right),$$

где $[a_i, a_j]$ означает наименьшее общее кратное чисел a_i и a_j, а минимум берется по всем парам различных чисел a_i, a_j.

б) Докажите, что

$$\max(a_i, a_j)>\frac{38n}{147}-c,$$

где c не зависит от n, а (a_i, a_j) означает наибольший общий делитель a_i и a_j. Оценки в задачах а) и б) нельзя улучшить (то есть коэффициент 6 заменить меньшим, а $\frac{38}{147}$ — бо́льшим).

Ниже будет доказано более общее утверждение. Пусть $a_1<$ $<a_2<\ldots<a_n\leqslant 2n$.

а) Докажем, что требуемое неравенство выполняется при $n\geqslant 5$. Пусть среди элементов последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ найдется число $a\leqslant n$. Если число $2a$ также принадлежит данной последовательности, то

$$\min[a_i, a_j]\leqslant[a, 2a]=2a\leqslant 2n<6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right),$$

что дает решение задачи. Если же $2a$ не принадлежит последовательности, то выбросим из нее число a и заменим его на $2a$. Ясно, что $\min[a_i, a_j]$ для новой последовательности не меньше, чем для исходной. Применив это же рассуждение к каждому элементу $a\leqslant n$, мы придем в конце концов к последовательности $n+1, n+2, \ldots, 2n$, причем $\min[a_i, a_j]$ для этой последовательности не меньше соответствующего минимума для любой другой последовательности, из которой она была получена, в частности — для исходной.

Докажем теперь, что для последовательности $n+1$, $n+2, \ldots, 2n$ при $n\geqslant 5$ выполняется равенство $\min[a_i, a_j]=6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$. В самом деле, если $n=2k$ или $n=2k+1$, возьмем следующие числа: $a=2k+2$, $b=3k+3$. Тогда при $n\geqslant 5$

$$n+1\leqslant a<b\leqslant 2n$$

и

$$[a, b]=6k+6=6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right).$$

А теперь проверим, что для любой пары чисел c, d, удовлетворяющей условию $n+1\leqslant c<d\leqslant 2n$, выполняется неравенство $[c, d]\geqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$. Действительно, $[c, d]=$ $=pd=qc$, где $q>p>1$. При этом либо $p=2$ и $q\geqslant 3$, либо $q\geqslant 4$. В первом случае c — число четное, тем самым $c\geqslant 2\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$ и $[c, d]=qc\geqslant 3c\geqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$. Во втором случае $[c, d]=qc\geqslant 4(n+1)>6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$. Этим завершается доказательство утверждения а).

б) Рассмотрим более общую задачу: *пусть $a_1<a_2<$ $<\ldots<a_k\leqslant B$ — последовательность натуральных чисел; требуется оценить снизу* $\max(a_i, a_j)$. Для этого полезно решать обратную задачу: *пусть A, B— положительные (не обязательно целые) числа; определить максимальное k, для которого найдется последовательность из k различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такая, что*

(1) *каждый элемент последовательности не превосходит B;*

(2) *$(a_i, a_j)\leqslant A$ для любых различных элементов a_i, a_j.*

Будем обозначать это максимальное количество через $k(A, B)$. Для решения исходной задачи нужно подобрать A так, чтобы $k(A, 2n)$ примерно равнялось n. Действительно, если для какого-то A

$$k(A, 2n)<n,$$

то для любой последовательности $a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant 2n$ будет $\max(a_i, a_j)>A$; если же $k(A, 2n)\geqslant n$, то найдется последовательность $a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant 2n$ такая, что $\max(a_i, a_j)\leqslant A$.

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — последовательность, удовлетворяющая условиям (1) и (2). Если у какого-то элемента a_i этой последовательности найдется с о б с т в е н н ы й (то есть не совпадающий с a_i) делитель $d>A$, то в силу условия (2) d не является элементом последовательности. Тогда, заменяя

a_i на d, мы получим новую последовательность той же длины, также удовлетворяющую условиям (1) и (2). Поступая таким же образом, мы получим в конце концов последовательность, в которой никакой элемент не имеет собственных делителей, больших A. Такую последовательность назовем *несократимой*.

Рассмотрим теперь множество M всех натуральных чисел, которые не превосходят B и не имеют собственных делителей, бо́льших A. M является несократимой последовательностью, удовлетворяющей условиям (1) и (2), и любая другая несократимая последовательность содержится в M. Поэтому ясно, что $k(A, B)$ просто равно числу элементов множества M.

Чтобы подсчитать число элементов множества M, сосчитаем отдельно число четных элементов, число нечетных элементов, делящихся на 3, и т. д. Более точно, пусть M_2 состоит из всех четных элементов множества M, M_3 состоит из всех нечетных элементов из M, делящихся на 3, M_5 состоит из всех элементов M, делящихся на 5, но не делящихся ни на 2, ни на 3. И вообще, для любого простого числа p множество M_p состоит из тех элементов множества M, которые делятся на p и не имеют простых делителей, меньших p.

Подсчитаем число элементов множества M_p. Любой элемент из M_p имеет вид pc, где $c\leqslant A$ (так как M — несократимое множество), $pc\leqslant B$ и c не имеет простых делителей, меньших p. Если $pA\leqslant B$, то условие $pc\leqslant B$ можно не принимать во внимание, и число элементов M_p равно количеству натуральных $c\leqslant A$, не имеющих простых делителей, меньших p (такое число будем обозначать через $m_p(A)$). Если же $pA>B$, то число элементов M_p равно $m_p\left(\frac{B}{p}\right)$ и не превосходит $m_p(A)$.

Зафиксируем простое число p. Множества $M_2, M_3, M_5, \ldots$ $\ldots, M_p$, вообще говоря, не исчерпывают множества M. Обозначим через N множество всех оставшихся элементов M. Они не имеют делителей среди чисел 2, 3, 5, ..., p, поэтому их количество не превосходит числа $m_q(B)$, где q — следующее за p простое число. Таким образом,

$$k(A, B)\leqslant m_2(A)+m_3(A)+\ldots+m_p(A)+m_q(B).$$

Если $pA\leqslant B<qA$, то это неравенство превращается в равенство. Действительно, ясно, что каждое M_r содержит ровно $m_r(A)$ элементов. С другой стороны, каждое число $c\leqslant B$, которое не имеет делителей, меньших q, не имеет тем самым делителей, бо́льших A (если $c=df$, где $d>A$ и $c\leqslant B<qA$, то $f<q$), и поэтому входит в N; следовательно, N содержит $m_q(B)$ элементов.

Теперь займемся оценкой чисел вида $m_r(C)$. Во-первых, $m_2(C)$ равно количеству всех натуральных $l\leqslant C$, то есть равно $[C]$, и отличается от C меньше, чем на 1. Далее, $m_3(C)=m_2(C)-m_2\left(\frac{C}{2}\right)$ (количество всех $l\leqslant C$ минус количество четных $l\leqslant C$). Поскольку $m_2(C)$ и $m_2\left(\frac{C}{2}\right)$ отличаются от C и $\frac{C}{2}$ меньше, чем на 1, то $m_3(C)$ отличается от $C\left(1-\frac{1}{2}\right)$ меньше чем на 2.

Рассуждая таким же образом, мы получим, что если p и q $(p<q)$ — два соседних простых числа, то $m_q(C)=m_p(C)-$ $-m_p\left(\frac{C}{p}\right)$, откуда индукцией получается, что $m_q(C)$ отличается от числа $C\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p}\right)$ меньше, чем на 2^{i-1}, где i — номер простого числа q. Иначе говоря, обозначив через Z_q произведение всех чисел вида

$\left(1-\frac{1}{r}\right)$, где r — простое число, меньшее q (и положив $Z_2=1$), получим

$$|m_q(C)-C\cdot Z_q|<2^{i-1}$$

(i — номер простого числа q). Таким образом, для числа $k(A,B)$ верны следующие оценки

$$k(A,B)\leqslant m_2(A)+\ldots+m_p(A)+m_q(B)<A(Z_2+Z_3+\ldots+Z_p)+B\cdot Z_q+1+2+\ldots+2^{i-1}=A(Z_2+\ldots+Z_p)+B\cdot Z_q+(2^i-1);$$

если же $pA\leqslant B<qA$, то

$$k(A,B)=m_2(A)+\ldots+m_p(A)+m_q(B)>A(Z_2+\ldots+Z_p)+B\cdot Z_q-(2^i-1). \qquad (3)$$

Вернемся теперь к исходной задаче и выясним, при каких A $k(A,2n)<n$. Для этого достаточно решить относительно A неравенство

$$A(1+Z_3+\ldots+Z_p)+2n\cdot Z_q+(2^i-1)\leqslant n.$$

Беря p равным 3,5 или 7, мы получим, соответственно,

$$A\leqslant\frac{2}{9}n-\frac{14}{3},\qquad A\leqslant\frac{14}{55}n-\frac{90}{11},$$

$$A\leqslant\frac{38}{147}n-\frac{310}{21}.$$

При $p=7$ появляется таинственный множитель $\frac{38}{147}$, самый большой из трех. Брать $p\geqslant 11$ бессмысленно, так как $11\cdot\frac{38}{147}n>2n$, и неравенства для $k(A,2n)$ будут менее точными. Итак, мы доказали, что при $n\geqslant 2$ для любой последовательности $a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant 2n$

$$\max(a_i,a_j)>\frac{38}{147}n-\frac{310}{21}.$$

Чтобы доказать, что коэффициент $\frac{38}{147}$ нельзя увеличить, возьмем $A=\frac{38}{147}n+\frac{310}{21}$. Тогда при $n\geqslant 543$ будет $7A\leqslant 2n<11A$, и, используя неравенство (3), получаем $k(A,2n)\geqslant n$. Следовательно, при $n\geqslant 543$ всегда найдется последовательность $a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant 2n$, для которой $\max(a_i,a_j)\leqslant\frac{38}{147}n+\frac{310}{21}$.

Если оценить $m_r(C)$ слегка аккуратней, то можно получить более точные неравенства: при $n\geqslant 2$ для любой последовательности $a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant 2n$

$$\max(a_i,a_j)\geqslant\frac{38}{147}n-\frac{73}{49};$$

и, кроме того, существует последовательность $a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant 2n$, для которой

$$\max(a_i,a_j)\leqslant\frac{38}{147}n+\frac{73}{49}$$

(замечательно то, что константу $\frac{73}{49}$ в этих неравенствах уменьшить уже нельзя).

Д. Бернштейн

Ф513. *В ясный солнечный день, когда Солнце находится высоко над горизонтом, получите на гладком экране, например, на белой стене, тень от ровного края куска картона. Если теперь поднести к листу картона палец так, как это показано на рисунке 5, то на экране навстречу тени пальца из тени, отбрасываемой листом картона, высунется тень второго пальца. Проведите такой опыт и объясните его результат.*

Привлечь для описания явления понятие дифракции невозможно, так как размеры дифракционной картины при таких расстояниях малы.

Решение задачи возможно только тогда, когда мы учтем, что Солнце — не точечный источник света, а обладает конечными угловыми размерами.

Чтобы понять, как появляется встречная тень, обратимся к рисунку 6.

Так как Солнце как источник света имеет некоторые угловые размеры (около половины градуса), то тени от всех предметов в солнечный день размыты. Степень размытия края тени зависит от расстояния от предмета до поверхности, где наблюдается тень. Хотя в приведенном опыте кажется, что край тени предмета резко очерчен, на самом деле это не так. Кроме области полной тени есть еще и область полутени. Когда палец, приближаясь к предмету, перекрывает часть лучей, попадающих в область полутени, на экране появляется встречная тень. Слияние тени и встречной тени при дальнейшем движении пальца вниз происходит на границе полутени и освещенной части экрана.

Измерив расстояния между предметом и экраном, между пальцем и предметом и размер встречной тени перед слиянием с прямой тенью, можно на основе простых геометрических соображений оценить угловой размер Солнца.

Г. Соловьянюк

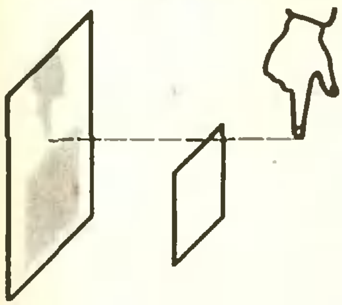


Рис. 5.

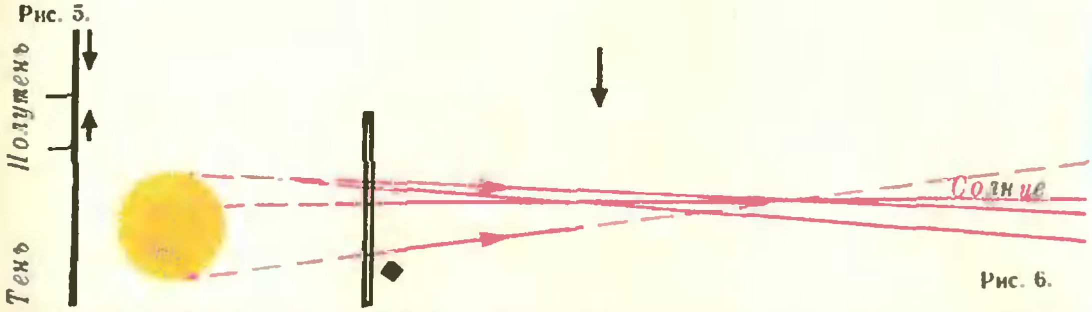


Рис. 6.

Ф516. *Тяжелый диск радиуса R скатывается на двух нерастяжимых нитях, намотанных на него. Свободные концы нитей закреплены (рис. 7). Нити при движении диска постоянно натянуты. В некоторый момент угловая скорость диска равна ω, а угол между нитями α. Какова в этот момент скорость центра диска?*

Рассмотрим движение точек c и d, в которых нити касаются диска, в системе координат, начало которой совпадает с точкой O, в которой находится центр диска, когда угол между нитями равен α, а оси OX и OY составляют угол α друг с другом и параллельны нитям (рис. 7). В этой системе координат (как и в любой неподвижной системе) скорости точек c и d равны соответственно

$$\vec{v}_c = \vec{v}_0 + \vec{v}_{c0}, \quad \vec{v}_d = \vec{v}_0 + \vec{v}_{d0},$$

где $\vec{v}_0$ — скорость центра диска, $\vec{v}_{c0}$ и $\vec{v}_{d0}$ — скорости точек c и d относительно центра диска. Очевидно, $|\vec{v}_{c0}| = |\vec{v}_{d0}|$, и при угловой скорости вращения диска ω

$$|\vec{v}_{c0}| = |\vec{v}_{d0}| = \omega R = u.$$

Из условия нерастяжимости нитей следует, что, когда нити образуют угол α, проекции v_{dx} и v_{cy} скоростей $\vec{v}_d$ и $\vec{v}_c$ на оси OX и OY равны нулю:

$$v_{dx} = v_{0x} - u = 0,$$
$$v_{cy} = v_{0y} - u = 0.$$

Отсюда

$$v_{0x} = v_{0y} = u.$$

Это означает, что вектор $\vec{v}_0$ скорости центра диска направ-

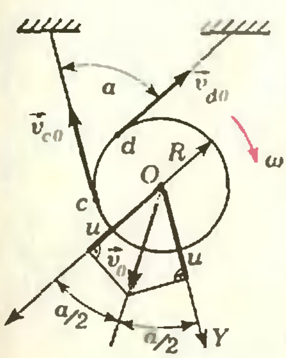


Рис. 7.

лен вдоль биссектрисы угла XOY и равен по абсолютной величине

$$\left|\vec{v}_0\right| = \frac{u}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\omega R}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

А. Матвеев

◆

Ф517. *Пучок электронов с энергией $E=1,0$ кэВ проходит через два небольших конденсатора, отстоящих друг от друга на расстоянии $l=20$ см. Оба конденсатора подключены параллельно к одному генератору. Изменением частоты генератора добиваются того, что пучок электронов проходит эту систему без отклонения. Определить отношение e/m для электрона, если два последовательных значения частоты, при которых выполняется это условие, равны 141 МГц и 188 МГц.*

Отклонения электронов в конденсаторах «компенсируют» друг друга, если за время $\Delta t=l/v$, пока электроны летят в промежутке между конденсаторами (v — абсолютное значение скорости электронов), фаза напряжения на конденсаторах меняется на $k\pi$, где k — целое число. Так как $\Delta\varphi=\omega\Delta t$ и $\omega=2\pi\gamma$ (γ — частота генератора), значения частот, при которых это условие выполняется, определяются соотношением

$$\frac{l}{v} = \frac{k\pi}{2\pi\gamma}.$$

Если γ_1 и γ_2 — последовательные значения частоты генератора, при которых электроны пролетают систему без отклонения, то

$$2\pi\gamma_1 l/v=k\pi, \quad 2\pi\gamma_2 l/v=(k+1)\pi.$$

Отсюда находим

$$v=2(\gamma_2-\gamma_1)l.$$

Итак, влетающий в систему электрон обладает кинетической энергией $E=\dfrac{mv^2}{2}$. Эту энергию $E=1$ кэВ электрон приобрел, пройдя «предварительно» разность потенциалов $u=1$ кВ: $E=eu$ (e — заряд электрона). Таким образом,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{4m(\gamma_2-\gamma_1)^2l^2}{2} = eu,$$

откуда

$$\frac{e}{m} = \frac{4(\gamma_2-\gamma_1)^2 l^2}{2u} = 1{,}76\cdot 10^{11}\ \text{Кл/кг}.$$

И. Слободецкий

НА МАРКАХ — АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

Нельзя сказать, чтобы Альберту Эйнштейну очень повезло в филателии. Существует всего несколько марок, посвященных ему и его научным достижениям. Правда, с течением времени значение его вклада в науку растет — мы все лучше и лучше понимаем величие его трудов. Поэтому, наверное, в будущем появится еще немало эйнштейновских марок.

Мы воспроизводим здесь две почтовые марки с портретами Эйнштейна. Одна из них выпущена в Польской народной республике, другая — в США.

А. Алтыкис, В. Рудов

В. Рыжик

Где ошибка?

В некоторой школе, в некотором (девятом) классе решалась

Задача. *Найти наибольшее значение площади боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, если площадь его основания равна* 1, *а длина диагонали равна* 2.

Обозначим длины сторон основания через a и b, длину бокового ребра — через c. Тогда площадь Q боковой поверхности будет равна $2(a+b)c$. Итак, для решения задачи нужно найти наибольшее значение выражения

$$Q=2(a+b)c. \qquad (1)$$

Из условия вытекает, что измерения параллелепипеда a, b и c связаны равенствами

$$\begin{cases} ab=1, & (2)\\ a^2+b^2+c^2=4. & (3)\end{cases}$$

Запишем выражение (1) как функцию от одной переменной. В той школе, в том классе были предложены два способа для этого.

Первый способ. Из (2) $b=\frac{1}{a}$.

Тогда из (3) $c=\sqrt{4-a^2-\frac{1}{a^2}}$.

Значит, функция, наибольшее значение которой надо найти, имеет вид

$$Q(a)=2\left(a+\frac{1}{a}\right)\sqrt{4-a^2-\frac{1}{a^2}}. \qquad (4)$$

Как полагается, возьмем производную. Преобразовав ее, получим

$$Q'(a)=-\frac{4(a-1)(a+1)(a^4-a^2+1)}{a^3\sqrt{-a^4+4a^2-1}}$$

Областью определения функции $Q(a)$ является множество

$$\left[-\sqrt{2+\sqrt{3}};\ -\sqrt{2-\sqrt{3}}\right]\cup\left[\sqrt{2-\sqrt{3}};\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\right].$$

По смыслу обозначений $a>0$. Таким образом, нужно найти наибольшее значение функции (4) на отрезке $\left[\sqrt{2-\sqrt{3}};\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$. Обычным способом («Алгебра и начала анализа 9», п. 59) находим

$$\max Q(a)=Q(1)=4\sqrt{2}.$$

Второй способ. Из (2) и (3) легко следует

$$(a+b)^2+c^2=6 \qquad (5)$$

или

$$a+b=\sqrt{6-c^2}. \qquad (6)$$

Из (1) и (6) получаем

$$Q(c)=2c\sqrt{6-c^2}. \qquad (7)$$

Опять возьмем производную:

$$Q'(c)=\frac{6-2c^2}{\sqrt{6-c^2}}.$$

Областью определения функции $Q(c)$ является отрезок $[-\sqrt{6};\sqrt{6}]$. По смыслу обозначений $c>0$. Поэтому будем искать наибольшее значение функции (7) на промежутке $[0;\sqrt{6}]$. Обычным способом находим

$$\max Q(c)=Q(\sqrt{3})=6.$$

Оказалось, что, по-разному выбрав переменную, через которую мы выражаем целевую функцию (1), мы получили разные результаты.

В той школе, в том классе довольно быстро разобрались, в чем дело. А вы?

Квант для младших школьников

Задачи

1. Прочтите 14 зашифрованных цифрами слов:

5916, 1378, 609136, 6094, 9721,
591, 690958, 634, 7958, 8374,
61274, 790968, 4242025, 79691,

заменив для этого в приведенном на рисунке примере на умножение буквы на цифры (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры).

2. В языке некоторого племени любое сочетание восьми различных букв И, Г, Р, Ё, Т, Н, О, К является словом и других слов нет. Вождь племени, узнав о существовании словарей, поручил своему придворному Лингвисту составить аналогичный словарь из всех слов племени. Лингвист выписал буквы в порядке И, Г, Р, Ё, Т, Н, О, К и стал упорядочивать слова в соответствии с этим алфавитом. Он дошел до слова ЁКОНТРГИ. Какое слово он должен написать следующим? А после слова ИЁНГТКОР? После слова ИГКОНТЁР? Можете ли вы предложить Лингвисту простой способ упорядочивания слов в словаре? Кстати, какое слово будет последним?

3. Задача — шутка. В комнате стоят табуретки и стулья. У каждой табуретки 3 ноги, у каждого стула 4 ноги. Когда на всех табуретках и стульях сидят люди, в комнате всего 39 ног. Сколько стульев и сколько табуреток в комнате?

4. Два человека бегут по ступеням эскалатора метро. Один бежит быстрее другого. Кто из них насчитает больше ступеней?

А. Савин

Число — буква — число

(поупражняемся в устном счете!)

Чтобы заполнить цифрами клетки изображенного на рисунке 1 *кросснамбера* (в отличие от *кроссворда* он составляется не из слов, а из чисел), необходимо расшифровать числа x, y, z, u, v и выполнить над ними несколько арифметических действий. Полученные числа нужно поставить в клетки кросснамбера.

Все вычисления постарайтесь сделать «в уме», используя карандаш и бумагу лишь для записи окончательных результатов.

На рисунке 2 изображен код, с помощью которого зашифрованы числа x, y, z, u и v; однако, чтобы расшифровать эти числа, нужно применить свой ключ для каждого числа. Покажем это на примере.

Пример.

Ключ: *умножить на 2*. 33—10—8—35—8—30—3—25—15—35—26—9—8—27—25—8—17. Умножим эти числа на 2 и прочитаем с помощью кодовой картинки (рис. 2): 66—20—16—70—16—60—6—50—30—70—52—18—16—54—50—16—34 ЭТО★ОЧЕНЬ★ПРОСТО.

Теперь попробуйте найти эти числа.

Число x.

Ключ: *прибавить 7*. 33—34—31—26—13—23.

Число y.

Ключ: *разделить на 3*. 60—87—57—99—75—3.

Число z.

Ключ: *вычесть 6*. 26—24—16—21—42—11—30—7—26—36.

Число u.

Ключ: *умножить на 2 и вычесть 2*. 9—21—6—26.

Число v.

Ключ: *умножить на 3 и прибавить 1*. 6—18—5.

Найдя числа x, y, z, u, v, мы сможем заполнить клетки кросснамбера:

По горизонтали

$b)$ $(x+z+v)\,v+u$;
$d)$ $y:(x-u)$;
$e)$ $(v-u)\cdot(z-x)$;
$g)$ $yz-(x+z)\,(x+u)$;
$h)$ $(x+u)\,y+z$;
$j)$ $(z-x)\,(y+u):z$;
$l)$ xv;
$m)$ $y\,(y+u):z+z$.

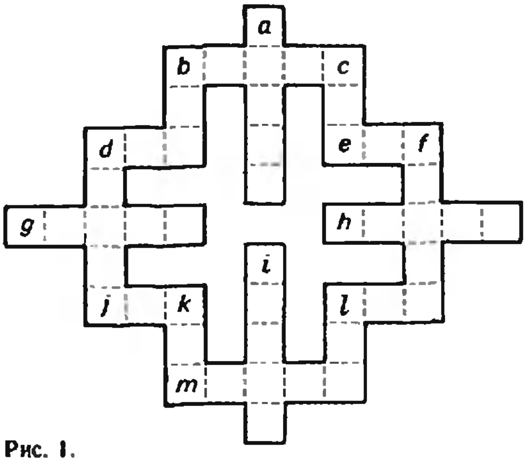


Рис. 1.

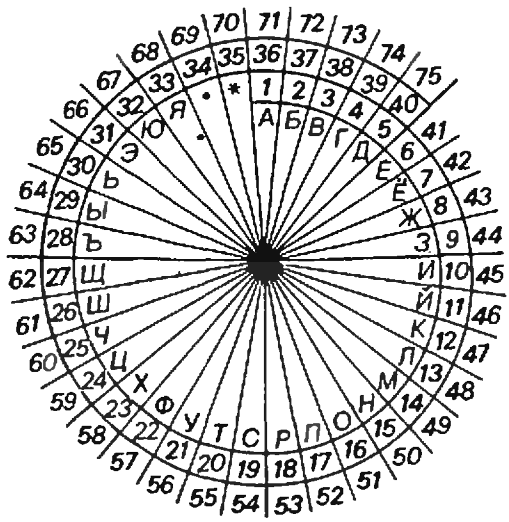


Рис. 2.

По вертикали:

a) $(x+z)\,y$;
b) $z+u+v-x$;
c) $x+z+u+v$;
d) $xzv+z$;
f) $yz\,(z+u-x)$;
i) yz;
k) $xv-z$;
l) $xv+z$.

Числовые ребусы

Замените буквы и звездочки цифрами так, чтобы получились верные «примеры». В каждой задаче разные буквы обозначают разные цифры (разумеется, в различных задачах одна и та же буква может обозначать разные цифры); звездочки можно заменять любыми цифрами. Первая задача состоит из двух «примеров».

Э. Рекстин

1.

```
   ×СРЕДА
    НИКТО
   *****О
  *****Т
 *****К
 ****И
*****Н
******АР**
```

```
ИНДЕКСАТОР | НИКТО
******     | СРЕДА
 ***ЕДА
 ******
  ******
  ******
     *****
     *****
        ТА
```

2.

```
а*********| а***
аа***     | ******
  ****
  ****
  а****
  а***а
    ****
    ****
     **а*
     **а*
```

3.

$$и^с + к^с + с^с = икс$$

Л. Асламазов

Работа и мощность электрического тока

При перемещении заряда q в электрическом поле совершается работа

$$A=q(\varphi_1-\varphi_2)=qU,$$

где $U=\varphi_1-\varphi_2$ — разность потенциалов начального и конечного положений заряда. Электрический ток — это направленное движение зарядов. За время t через поперечное сечение проводника, по которому течет ток I, проходит заряд $q=It$. Поэтому **полная работа**, которую может совершить электрический ток в проводнике, равна

$$A=qU=UIt.$$

Отсюда получается известная формула для **полной мощности** тока:

$$P=UI. \qquad (1)$$

Количество теплоты, выделяемое током в проводнике, определяется законом Джоуля—Ленца:

$$Q=I^2Rt.$$

Соответственно, **мощность тепловых потерь** определяется формулой:

$$P_т=I^2R. \qquad (2)$$

Для обычного проводника, для которого справедлив закон Ома $U=IR$, формулы (1) и (2) эквивалентны, и, следовательно, вся работа электрического тока переходит в тепло. При этом для мощности можно пользоваться еще и такой формулой:

$$P=P_т=\frac{U^2}{R}. \qquad (3)$$

Предпочтительность использования какой-либо из формул (1), (2) и (3) определяется постановкой конкретной задачи.

Задача 1. *Две электрические лампочки, рассчитанные на включение в сеть с напряжением $U=220$ В, имеют мощности $P_1=25$ Вт и $P_2=100$ Вт. Какая из лампочек будет гореть ярче, если их включить в сеть, соединив между собой последовательно?*

Найдите отношение яркостей каждой лампочки при обычном (одиночном) и последовательном включениях.

Считать, что яркость пропорциональна тепловой мощности, выделяемой в лампочке.

При последовательном соединении лампочек через них течет один и тот же ток. Поэтому для сравнения выделяемых в них мощностей удобнее пользоваться формулой (2):

$$\frac{P_1'}{P_2'}=\frac{I^2R_1}{I^2R_2}=\frac{R_1}{R_2}.$$

Для нахождения отношения сопротивлений воспользуемся формулой (3), так как известные номинальные мощности P_1 и P_2 соответствуют одному и тому же напряжению U на лампочках:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{U^2/R_1}{U^2/R_2}, \text{ и } \frac{R_1}{R_2}=\frac{P_2}{P_1}.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{P_1'}{P_2'}=\frac{P_2}{P_1}=4$$

— лампочка мощностью в 25 Вт при последовательном включении будет гореть в 4 раза ярче.

Сравним теперь мощности, выделяемые в каждой лампочке при обычном (одиночном) и последовательном включениях. В первом случае

$$P_1=\frac{U^2}{R_1} \text{ и } P_2=\frac{U^2}{R_2}.$$

Отсюда можно найти сопротивления лампочек R_1 и R_2:

$$R_1=\frac{U^2}{P_1} \text{ и } R_2=\frac{U^2}{P_2}.$$

Когда лампочки соединены последовательно, через них течет ток $I=\dfrac{U}{R_1+R_2}$. Выделяемые в лампочках мощности можно найти по формуле (2):

$$P_1' = \frac{U^2R_1}{(R_1+R_2)^2} \text{ и } P_2' = \frac{U^2R_2}{(R_1+R_2)^2}.$$

Тогда для отношений мощностей получаем:

$$\frac{P_1}{P_1'} = \left(1+\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \frac{25}{16} \text{ и } \frac{P_2}{P_2'} = \left(1+\frac{P_2}{P_1}\right)^2 = 25$$

— обе лампочки при последовательном включении горят менее ярко, однако для второй лампочки уменьшение мощности в 16 раз больше.

Когда на участке цепи имеется источник ЭДС $\mathscr{E}$, выражения для полной мощности и мощности тепловых потерь (формулы (1) и (2)) перестают быть эквивалентными, и поэтому в балансе энергий необходимо учитывать работу сторонних сил $\mathscr{E}It$. При этом напряжение U на участке отличается от ЭДС $\mathscr{E}$ на величину падения напряжения IR:

$$U=\mathscr{E}\pm IR \qquad (4)$$

(знак «минус» относится к случаю, когда направление тока на участке совпадает с направлением тока, создаваемого ЭДС, «плюс»— к противоположному случаю). Соответственно, полная мощность тока UI не равна тепловой мощности I^2R:

$$UI=\mathscr{E}I\pm I^2R. \qquad (5)$$

Задача 2. *Определить работу электрических сил и количество теплоты, выделяемое за $t=1$ с, в аккумуляторе: а) при его зарядке током $I_1=5$ А, разность потенциалов между полюсами аккумулятора $U_1=20$ В, ЭДС аккумулятора $\mathscr{E}=12$ В; б) при разрядке того же аккумулятора на внешнее сопротивление, ток разрядки $I_2=1$ А.*

В первом случае — при зарядке аккумулятора — направление электрического тока противоположно направлению тока, создаваемого ЭДС (рис. 1, *а*), поэтому в формулах (4) и (5) необходимо поставить знаки «плюс». Это означает, что полная работа электрических сил, равная

$$A_1=U_1I_1t=100 \text{ Дж},$$

складывается из работы $\mathscr{E}I_1t$ против сторонних сил (зарядка аккумулятора) и выделяемого количества теплоты; следовательно, количество теплоты равно

$$Q_1=A_1-\mathscr{E}I_1t=(U_1-\mathscr{E})I_1t=40 \text{ Дж}.$$

Формула (4) позволяет также определить и внутреннее сопротивление r аккумулятора:

$$U_1=\mathscr{E}+I_1r, \text{ и } r=\frac{U_1-\mathscr{E}}{I_1}.$$

Во втором случае — при разрядке аккумулятора — ток на интересующем нас участке совпадает по направлению с током, создаваемым ЭДС (рис. 1, *б*), поэтому работа электрических сил равна

$$A_2=U_2I_2t=(\mathscr{E}-I_2r)I_2t=$$
$$=\frac{(\mathscr{E}(I_1+I_2)-U_1I_2)I_2}{I_1}t=10{,}4 \text{ Дж},$$

а количество теплоты —

$$Q_2=I_2^2rt=\frac{I_2^2(U_1-\mathscr{E})}{I_1}t=1{,}6 \text{ Дж}.$$

Задача 3. *Источник тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на реостат с переменным сопротивлением R (рис. 2, а). Построить графики зависимости силы тока I, напряжения на источнике U, мощности P, выделяемой во внешней цепи, полной мощности тока $P_п$, а также КПД η при изменении сопротивления реостата R.*

Напишем вначале аналитические выражения для указанных зависимостей. Сила тока находится по закону

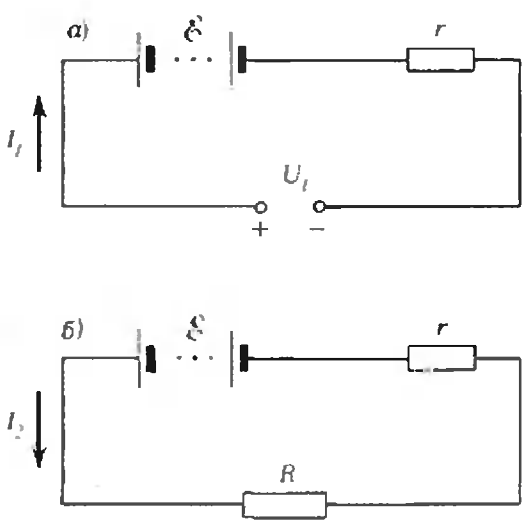


Рис. 1.

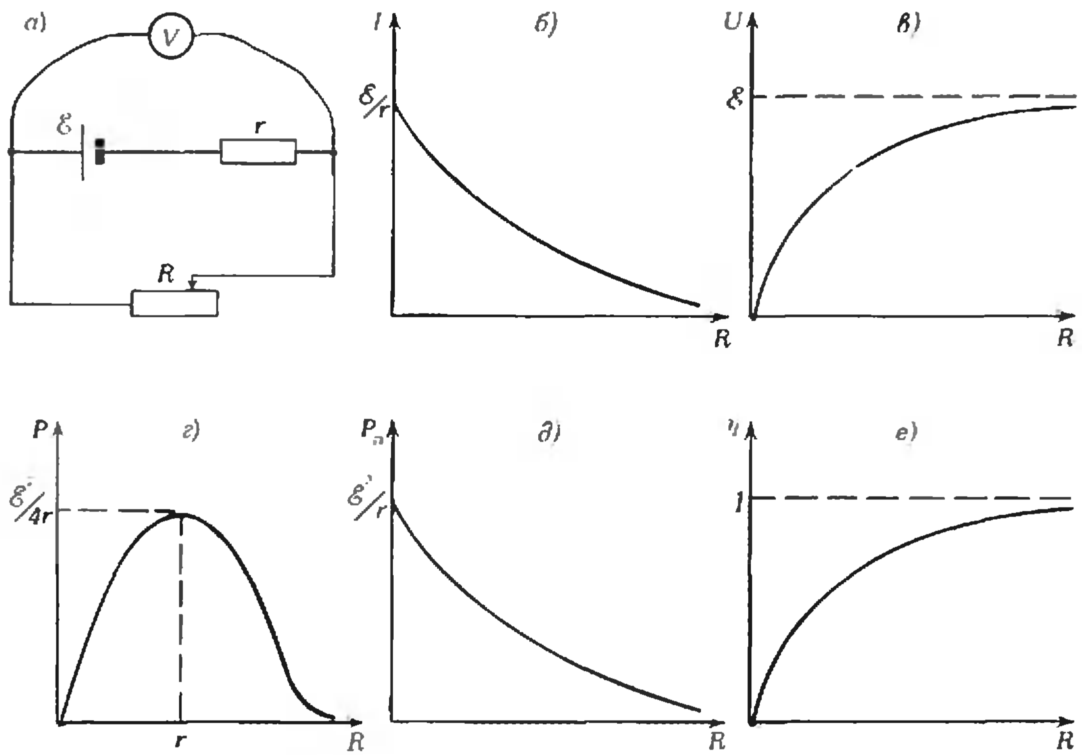


Рис. 2.

Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R+r}.$$

Напряжение на источнике равно напряжению на внешнем сопротивлении:

$$U = IR = \frac{\mathscr{E}R}{R+r}.$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи, равна мощности тепловых потерь; ее можно определить по формуле (2):

$$P = I^2R = \frac{\mathscr{E}^2R}{(R+r)^2}.$$

Полная мощность тока равна мощности сторонних сил или суммарной мощности тепловых потерь на внутреннем и внешнем сопротивлениях:

$$P_п = \mathscr{E}I = I^2(R+r) = \frac{\mathscr{E}^2}{R+r}.$$

Для коэффициента полезного действия имеем:

$$\eta = \frac{P}{P_п} = \frac{R}{R+r}.$$

Соответствующие графики показаны на рисунках 2, *б*—*е*. Обратите внимание на наличие максимума у мощности P, выделяемой во внешней цепи (покажите самостоятельно, что мощность P максимальна при равенстве внешнего и внутреннего сопротивлений).

Другой пример, когда не вся работа электрических сил переходит в тепло, дают электромоторы.

Задача 4. *Электромотор включен в сеть постоянного тока с напряжением $U = 220$ В. Сопротивление обмотки мотора $R = 5$ Ом. Сила потребляемого тока $I = 10$ А. Найти механическую мощность мотора и его КПД.*

Полная мощность электрического тока в данном случае складывается из механической и тепловой мощностей:

$$UI = P_м + I^2R,$$

поэтому

$$P_м = UI - I^2R = 1700 \text{ Вт}$$

и КПД мотора

$$\eta = \frac{P_м}{P} = \frac{UI - I^2R}{UI} \approx 0{,}77 = 77\%.$$

Задача 5. *Какую максимальную полезную (механическую) мощность $P_{м\,max}$ может развить электромотор, имеющий сопротивление об-*

мотки R и включенный в сеть с напряжением U? Какой ток при этом он потребляет?

Найдите значение тока через обмотку мотора при мощности $P_м < P_{м\,max}$. Какой физический смысл имеет неоднозначность ответа?

Из решения предыдущей задачи следует, что зависимость $P_м$ от тока I является квадратичной и графически изображается параболой (рис. 3). Максимальная мощность $P_{м\,max} = \frac{U^2}{4R}$ достигается при токе $I = \frac{U}{2R}$ (проверьте это).

Как видно из рисунка 3, одна и та же мощность $P_м < P_{м\,max}$ развивается при двух значениях тока

$$I_1 = \frac{U - \sqrt{U^2 - 4P_мR}}{2R}$$

и

$$I_2 = \frac{U + \sqrt{U^2 - 4P_мR}}{2R}.$$

Объясним физический смысл этой неоднозначности. Запишем закон Ома для обмотки мотора:

$$U = \mathscr{E}_{инд} + IR,$$

где $\mathscr{E}_{инд}$ — ЭДС индукции, которая возникает вследствие вращения обмотки в магнитном поле (знак «плюс» в формуле выбран в соответствии с правилом Ленца). По закону электромагнитной индукции $\mathscr{E}_{инд}$ пропорциональна скорости вращения. Следовательно, различные значения тока соответствуют разным значениям ЭДС и, соответственно, разным скоростям вращения мотора: одну и ту же механическую мощность мотор может развивать, поднимая медленно тяжелый груз или быстро — легкий.

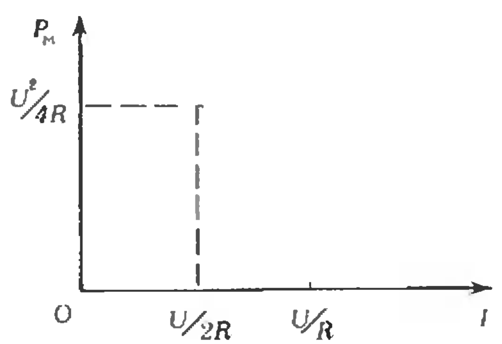


Рис. 3.

З а д а ч а 6. *Какую полезную мощность развивает мотор, включенный в сеть с напряжением $U = 220$ В, при потребляемом токе $I_1 = 10$ А? Известно, что при полном затормаживании якоря через обмотку течет ток $I_2 = 40$ А.*

При полной остановке мотора ЭДС индукции в обмотке равна нулю; следовательно, $U = I_2R$. Отсюда найдем сопротивление R обмотки мотора: $R = U/I_2 = 5{,}5$ Ом. Полезная (механическая) мощность при токе I_1 равна

$$P_м = UI_1 - I_1^2R = 1650 \text{ Вт}.$$

Теперь обсудим вопрос о тепловых потерях при передаче энергии по проводам на далекие расстояния. Как известно, для того чтобы тепловые потери сделать минимальными, в линиях передач используют высокое напряжение. Не следует путать п е р е д а в а е м о е н а п р я ж е н и е U — разность потенциалов между проводами линии электропередачи и п а д е н и е н а п р я ж е н и я в линии $\Delta U = IR$, которое связано с текущим по проводам током I и сопротивлением линии R. Передаваемая по проводам мощность равна $P = UI$, а тепловые потери — $P_т = I^2R = \frac{\Delta U^2}{R}$. Одну и ту же мощность P можно передать при меньшем токе, если увеличить передаваемое напряжение U. При этом падение напряжения в линии ΔU и тепловые потери $P_т$ уменьшатся.

З а д а ч а 7. *Линия электропередачи должна передать мощность $P = 100$ кВт на расстояние $L = 100$ км. Потери энергии не должны превышать 2%. Какое минимальное сечение провода (с удельным сопротивлением $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) пригодно для этой цели, если передаваемое напряжение $U = 5000$ В?*

Во сколько раз можно уменьшить сечение провода при увеличении напряжения в 10 раз?

Сила тока в линии $I = P/U$. Максимальные тепловые потери $P_т = I^2R = \frac{P^2R}{U^2}$ должны составлять $0{,}02\ P$. Отсюда сопротивление линии равно $R = \frac{U^2}{50P}$. Используя известное выраже-

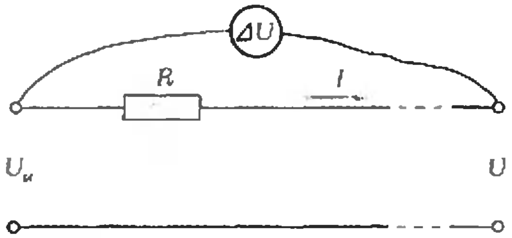


Рис. 4.

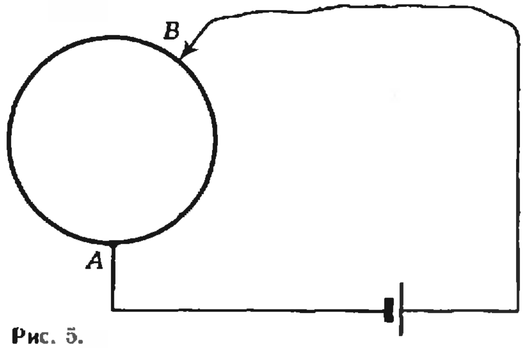


Рис. 5.

ние для сопротивления $R=\rho l/S$, получаем:

$$S=\frac{\rho l}{R}=\frac{100\rho LP}{U^2}\approx 7\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

Отсюда видно, что при увеличении напряжения в 10 раз сечение можно уменьшить в 100 раз!

З а д а ч а 8. *Во сколько раз следует повысить напряжение источника, чтобы снизить потери мощности в линии в 100 раз при передаче на нагрузку одной и той же мощности? Известно, что в первом случае падение напряжения в линии составляет $n=0,03$ от напряжения на нагрузке. Надо ли при этом изменять сопротивление нагрузки?*

Тепловые потери в линии с сопротивлением R равны $P_т=I^2R$. Поэтому для уменьшения потерь в 100 раз необходимо уменьшить ток в 10 раз: $I_2=I_1/10$.

Напряжение источника $U_и$ отличается от напряжения на нагрузке U на величину $\Delta U=IR$ падения напряжения на подводящих проводах (рис. 4):

$$U_{и1}=U_1+I_1R \quad \text{и} \quad U_{и2}=U_и+I_2R.$$

Так как мощность, передаваемая на нагрузку, не меняется, то

$$U_1I_1=U_2I_2.$$

Кроме того, по условию задачи

$$I_1R=nU_1.$$

Используя написанные соотношения, для отношения напряжений на источнике получаем:

$$\frac{U_{и2}}{U_{и1}}=\frac{100+n}{10(1+n)}.$$

Так как передаваемый ток уменьшается в 10 раз, то для того чтобы нагрузка потребляла ту же мощность, ее сопротивление необходимо увеличить в 100 раз.

У п р а ж н е н и я

1. Имеется пять электрических лампочек, рассчитанных на напряжение 110 В. Мощность трех лампочек 40 Вт, а двух — 60 Вт. Как следует включить их в сеть с напряжением 220 В, чтобы все они горели полным накалом?

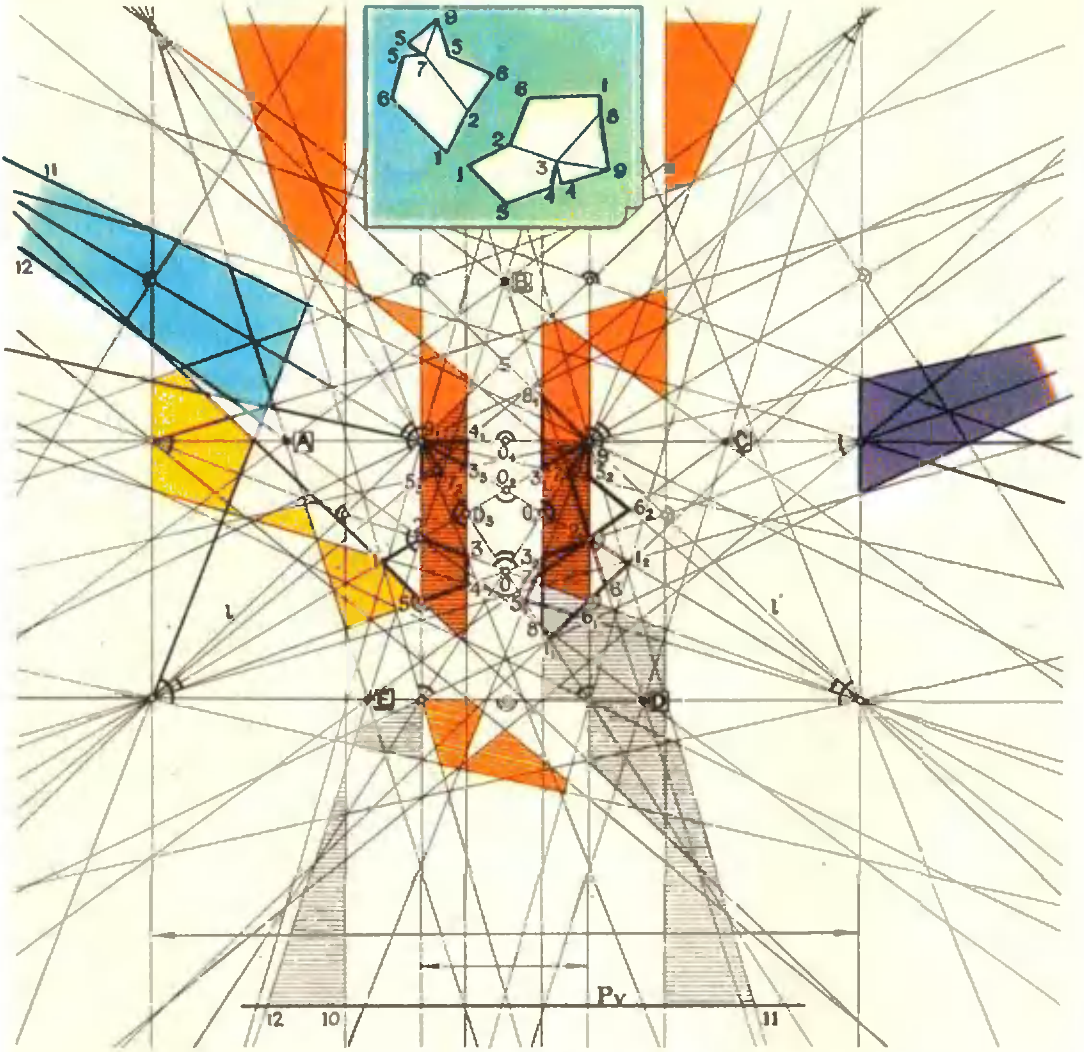
2. Кольцо из однородной проволоки включено в цепь, как показано на рисунке 5. При каком положении движка B в кольце будет выделяться минимальное количество теплоты? Считать, что напряжение на источнике постоянно.

3. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r=0,5$ Ом замкнут на внешнюю цепь. При токе $I_1=2$ А на внешнем сопротивлении выделяется мощность $P_1=8$ Вт. Какая мощность выделится во внешней цепи при токе $I_2=1$ А? Чему равна ЭДС аккумулятора?

4. Почему электромотор, работающий вхолостую, нагревается меньше, чем когда он нагружен? В каком случае в обмотке мотора выделяется наибольшее количество теплоты?

5. Двигатель локомотива массой $m=50$ т при подъеме в гору с уклоном $\alpha=0,01$ потребляет ток $I_1=100$ А, а при спуске с той же горы — ток $I_2=50$ А. Найти скорости поезда в обоих случаях. Напряжение в линии $U=2000$ В; КПД двигателя $\eta=0,7$; коэффициент трения $k=0,02$.

6. Объясните, почему при включении в сеть электроприборов, потребляющих большую мощность, яркость горящих лампочек уменьшается. Рассчитайте, во сколько раз уменьшится яркость лампочки с номинальной мощностью $P_1=100$ Вт при включении параллельно ей утюга мощностью $P_2=1000$ Вт (считать, что яркость лампочки пропорциональна выделяемому в ней количеству теплоты). Сопротивление подводящих проводов от источника номинального напряжения $U=127$ В до розетки $R=2$ Ом.



Постройте многогранник!

С помощью этого рисунка можно построить сколько угодно многогранных поверхностей. (Фотография одной из них приведена на второй странице обложки.) Строятся они так.

Возьмем большой кусок кальки и наложим его на рисунок. Перенесем на него произвольный многоугольник, образованный линиями нашего рисунка. Отметим на кальке некоторую вершину многоугольника и на любой из содержащих его стороны прямых найдем точку с дужкой. Повернем кальку вокруг этой точки на отмеченный угол. При этом ребро нашего многоугольника обязательно совместится с ребром некоторого другого многоугольника. Его мы тоже перенесем на кальку — он «приклеится» к первому многоугольнику с внешней стороны. Затем на любой из тех прямых, содержащих два «свободных» ребра нашего чертежа, которые примыкают к отмеченной вершине, найдем точку с дужкой, вновь повернем кальку и срисуем следующий многоугольник. Будем действовать так до тех пор, пока при очередном повороте мы не получим уже срисованный многоугольник. Как только это произойдет, у нас окажется развертка всех примыкающих к данной вершине граней строящейся поверхности.

Заметим, что нам не всегда удастся обойтись одним листом кальки. Если грани в вершине сходятся «гармошкой», то развертка «налезет» на себя и придется перейти на другой лист кальки. Поступим также со следующей вершиной и т. д. В результате мы получим развертку некоторой многогранной поверхности. После некоторой тренировки вы научитесь извлекать из эпюры (так называется рисунок) самые разнообразные поверхности.

(Окончание см. с. 53)

С. Сефибеков

Доказательство геометрических неравенств

В математических задачах часто бывает полезен такой прием: двумя способами найти одну и ту же величину и приравнять полученные для нее выражения. Пусть мы, например, двумя способами нашли площадь некоторой фигуры. Если в одном из выражений для площади входит, скажем, синус какого-либо угла α, то при помощи соотношения $\sin\alpha \leqslant 1$ из полученного равенства можно получить некоторое неравенство, порой интересное. В статье С. Сефибекова этот прием иллюстрируется восемью задачами. Эти задачи доступны восьмиклассникам, но они интересны и для поступающих в вуз — задачи такого типа попадаются на устных экзаменах.

Ключ к решению приведенных ниже задач — три формулы для площадей. Как известно («Геометрия 8», п. 108), площадь треугольника равна половине произведения двух (любых) его сторон на синус угла между ними:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha \qquad (1)$$

Выведите отсюда, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними*):

$$S=\frac{1}{2}l_1l_2\sin\alpha. \qquad (2)$$

Докажите также, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности:

$$S=\frac{1}{2}Pr. \qquad (3)$$

*) Почему не нужно указывать, какой именно угол между диагоналями рассматривается?

Задача 1. *Доказать, что произведение любых двух сторон треугольника не меньше произведения его периметра на радиус вписанной окружности: $ab \geqslant Pr$.*

Решение. Достаточно приравнять выражения (1) и (3) для площади треугольника и учесть, что $\sin\alpha \leqslant 1$.

Замечание. Из решения видно, что если угол между сторонами с длинами a и b — не прямой, то

$$ab>Pr. \qquad (4)$$

Из неравенства (4) и замечания следует, что для любого треугольника

$$ab+bc+ca>3Pr.$$

Задача 2. *Доказать, что радиус R окружности, описанной около произвольного треугольника, радиус r вписанной окружности и его периметр P удовлетворяет неравенству*

$$\text{а)}\ R>\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{Pr}, \qquad (5)$$

если треугольник остроугольный или тупоугольный;

$$\text{б)}\ R\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{Pr}, \qquad (6)$$

если треугольник прямоугольный.

Решение. а) Соединим центр O описанной окружности с вершинами треугольника.

Для остроугольного треугольника (рис. 1)

$$S_{ABC}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COA}. \qquad (7)$$

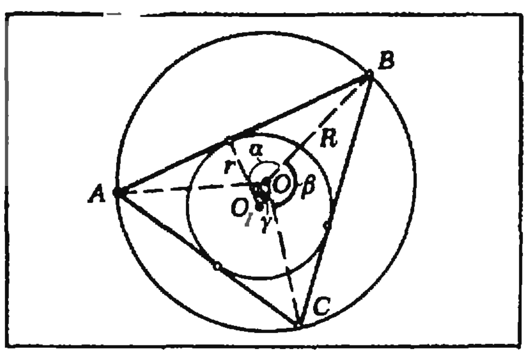


Рис. 1.

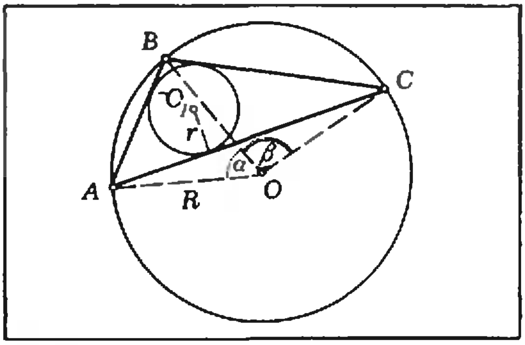


Рис 2.

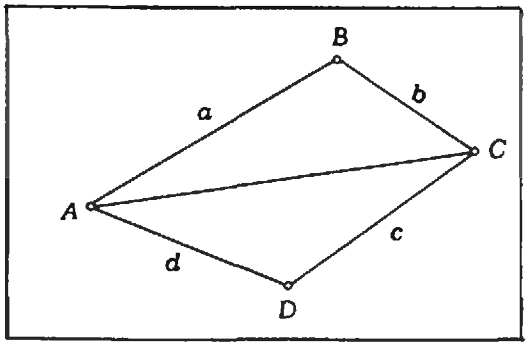


Рис. 3.

По формуле (3)

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}Pr, \qquad (8)$$

а по формуле (1)

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha, \qquad (9)$$

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}R^2\sin\beta, \qquad (10)$$

$$S_{COA}=\frac{1}{2}R^2\sin\gamma. \qquad (11)$$

Из равенств (7)—(11)

$$Pr=R^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma). \qquad (12)$$

Из общих свойств синуса $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant3$. Поскольку $\alpha+\beta+\gamma=360°$,

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma<3. \qquad (3)$$

Для тупоугольного треугольника (с тупым углом в вершине B — рис. 2)

$$S_{ABC}=(S_{AOB}+S_{COB})-S_{AOC}$$

или

$$Pr=R^2(\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)). \qquad (14)$$

Поскольку $\sin\alpha\leqslant1$, $\sin\beta\leqslant1$, $\sin(\alpha+\beta)\geqslant-1$ и $\alpha+\beta\neq180°$, мы имеем $\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)<3$. Отсюда и из (14) получаем (5).

б) Соединим вершину прямого угла C с центром O описанной окружности. Для прямоугольного треугольника ABC аналог равенств (12), (14) имеет вид:

$$Pr=R^2(\sin\widehat{AOC}+\sin\widehat{COB}).$$

Отсюда $\frac{Pr}{R^2}\leqslant2$, что доказывает неравенство (6).

Если $\hat{A}=\hat{B}=45°$, то $R=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{Pr}$; в этом случае радиус R принимает наименьшее значение. Таким образом, из всех прямоугольных треугольников с фиксированным произведением Pr или, что все равно (см. формулу (3)), с фиксированной площадью S, минимальный радиус R имеет равнобедренный треугольник.

Задача 3. *Доказать, что периметр P четырехугольника, описанного около окружности радиуса r, и длины его диагоналей l_1, l_2 удовлетворяют неравенству:*

$$Pr\leqslant\frac{l_1^2+l_2^2}{2}.$$

Решение. Из формул (2) и (3)

$$Pr=l_1l_2\sin\alpha. \qquad (15)$$

Из неравенства $(l_1-l_2)^2\geqslant0$ следует

$$l_1l_2\leqslant\frac{l_1^2+l_2^2}{2},$$

откуда, в силу (15), получаем искомое неравенство.

Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то $\sin\alpha=1$, т. е. $Pr=l_1l_2$. Если еще $l_1=l_2=l$ (т. е. для квадрата), то

$$Pr=l^2=\frac{l_1^2+l_2^2}{2}.$$

Задача 4. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Пусть P_1, P_2, P_3 и P_4 — периметры, соответственно, треугольников AOB, BOC, COD и DOA, а r_1, r_2, r_3 и r_4 — радиусы вписанных в них окружностей.*

Доказать неравенство:

$$|OA|\cdot|OB|\cdot|OC|\cdot|OD|\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(P_1r_1)\cdot(P_2r_2)\cdot(P_3r_3)\cdot(P_4r_4)}. \qquad (16)$$

Решение. С одной стороны, по формуле (3)

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}P_1r_1. \qquad (17)$$

С другой стороны, по формуле (1)

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\widehat{AOB}. \quad (18)$$

Из (17) и (18)

$$P_1r_1 \leqslant |OA|\cdot|OB|. \quad (19)$$

Аналогично,

$$P_2r_2 \leqslant |OB|\cdot|OC|, \quad (20)$$

$$P_3r_3 \leqslant |OC|\cdot|OD|, \quad (21)$$

$$P_4r_4 \leqslant |OD|\cdot|OA|. \quad (22)$$

Из (19) — (22) легко получается требуемое неравенство.

Равенство достигается, когда $[AC]\perp[BD]$. Из (16) и (13) легко получается неравенство:

$$S_{AOB}\cdot S_{BOC}\cdot S_{COD}\cdot S_{DOA} \leqslant \leqslant \frac{1}{16}|OA|^2\cdot|OB|^2\cdot|OC|^2\cdot|OD|^2.$$

Задача 5. *Докажите, что для выпуклого четырехугольника ABCD справедливо неравенство*

$$S_{ABCD} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}, \quad (23)$$

где a, b, c, d — длины его сторон.

Решение. Разобьем четырехугольник диагональю на два треугольника (рис. 3). Тогда

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}.$$

По формуле (1)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{B}.$$

Отсюда и из неравенства $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$ получаем

$$S_{ABC} \leqslant \frac{a^2+b^2}{4}. \quad (24)$$

Аналогично

$$S_{ADC} \leqslant \frac{c^2+d^2}{4}. \quad (25)$$

Из (24) и (25) получаем требуемое неравенство.

Если $\widehat{B}=\widehat{D}=90^\circ$ и $a=b=c=d$, т. е. четырехугольник $ABCD$ — квадрат, то соотношение (23) превращается в равенство.

В заключение — три задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. *Доказать, что для трапеции с высотой h, диагоналями l_1, l_2 и основаниями a, b*

$$h \leqslant \frac{l_1 l_2}{a+b}.$$

Задача 7. *Доказать, что для треугольника ABC*

$$S_{ABC} < \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2),$$

где a, b, c — длины сторон.

Задача 8. *Доказать, что для выпуклого четырехугольника ABCD*

$$S_{ABCD} < \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2),$$

где a, b, c, d — длины сторон, e, f — длины диагоналей.

Постройте многогранник!

(Начало на с. 50)

Многогранник на второй странице обложки получен из этой эпюры несколько более сложным образом: в нем «окружения» вершин 3 и 7 использованы по пять раз — из них образован купол модели с вершиной 9. Боковые поверхности тоже получены из эпюры.

Как же строить эпюры? Делается это с помощью *равногранно полуправильных* многогранников.

Такие многогранники замечательны тем, что все их грани равноправны: для любых двух граней такого многогранника можно указать такое перемещение пространства, при котором многогранник перейдет в себя, а первая грань перейдет во вторую. Возьмем любой такой многогранник и рассмотрим плоскости всех его граней. Зафиксируем одну из этих плоскостей (назовем ее $П$). В ней остальными плоскостями «высекается» система прямых линий. Точно такие же системы образуются и в остальных плоскостях. Рассмотрим теперь некоторую прямую l системы. Она является пересечением плоскости $П$ и плоскости еще одной грани. При повороте, переводящем эту плоскость в плоскость $П$, прямая l перейдет в некоторую прямую l' плоскости $П$. Оказывается, прямая l' получается из прямой l либо поворотом (в плоскости $П$) относительно их общей точки, либо параллельным переносом. Остается нанести на чертеж точки поворотов с соответствующими дужками и стрелочки для параллельных переносов.

Эпюра на рисунке получена из равногранного полуправильного шестидесятиугольника («Квант», 1976, № 1).

Совет. При изготовлении эпюры в большем масштабе воспользуйтесь тем, что пятиугольник $ABCDF$ правильный.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Ниже публикуются образцы вариантов вступительных экзаменов по математике и задач по физике в 1978 году.

Математика

(письменный экзамен)

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. Для каких a и b ($a, b \in \mathbf{R}$) графики функций $f(x)=2x^4-a^2x^2+b-1$ и $g(x)=2ax^3-1$ имеют лишь две общие точки?

2. Сколько шестизначных чисел содержат точно четыре различные цифры?

3. Решить уравнение ($a \in \mathbf{R}$)

$$1+2(\sin^2 2x-2a\cdot\cos 2x+a)\,\mathrm{tg}^2 x-\cos 4x=0.$$

4. Угол между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен α, длина стороны основания — a. Найти радиус сферы, касающейся боковых граней пирамиды и описанной около пирамиды сферы.

5. Найти вектор $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$, образующий равные углы с векторами $\vec{b}=(y;\ -2z;\ 3x)$, $\vec{c}=(2z;\ 3x;\ -y)$, если $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{d}=(1;\ -1;\ 2)$, $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$ и угол между вектором $\vec{a}$ и осью Oy — тупой.

Отделение экономической кибернетики и отделение планирования народного хозяйства экономического факультета, химический факультет и факультет психологии

1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=4x-x^2+1$ и касательными к нему, проведенными в точках с абсциссами $x=0$ и $x=3$.

2. Сумма коэффициентов трех первых слагаемых разложения $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^m$ равна 97. Найти член разложения, содержащий x^4.

3. Найти решения уравнения

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}x\right)=2\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{x}{2}\right),$$

принадлежащие сегменту $[-\pi;\ \pi]$.

4. Длины боковых ребер треугольной пирамиды равны a, b, c; плоские углы, образованные этими ребрами, прямые. Найти длину высоты, опущенной на основание пирамиды.

5. При каких a и b ($a, b \in \mathbf{R}$) система

$$\begin{cases} 3^{2(x-y)}-6\cdot 3^{-2x}-3^{-y}>0, \\ ax+by=5 \end{cases}$$

имеет решения?

Географический и геологический факультеты и отделение политэкономии экономического факультета

1. Найти экстремумы, а также наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=(x-1)^2\sqrt{x^2-2x+3}$ на сегменте $[0;\ 3]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2+6x+9}{2(x+1)}+\log_2(x+1)<0.$$

3. Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, если их сумма равна 35, а сумма их квадратов равна 525.

4. Решить уравнение

$$2^{\frac{\sin x+\sin 3x-\sin 4x}{(1-\cos x)(1-\cos 3x)}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{tg}\, x\cdot(1+\mathrm{tg}^2 x)^{-1}}$$

5. Найти объем тела, полученного при вращении правильного шестиугольника вокруг его стороны длины a.

Физика

(задачи устного экзамена)

1. При каком наименьшем значении коэффициента трения k между стенкой и шаром точка подвеса шара и его центр могут находиться на одной вертикали (рис. 1)?

2. Человек стоит на неподвижной тележке и бросает горизонтально камень массы $m=8$ кг со скоростью $|\vec{v}|=5$ м/с. Масса тележки вместе с человеком равна $M=160$ кг. Определить работу, совершаемую человеком при броске.

3. На конце доски массы M и длины L находится маленький брусок массы m (рис. 2). Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости, а коэффициент трения между бруском и доской равен k. Резким толчком доске сообщают начальную скорость $\vec{v}$ (трением между доской и бруском в момент толчка пренебрегаем). Опишите дальнейшее движение системы. Соскользнет ли брусок с доски?

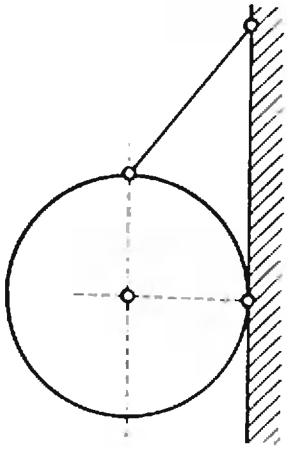


Рис. 1.

Рис. 2.

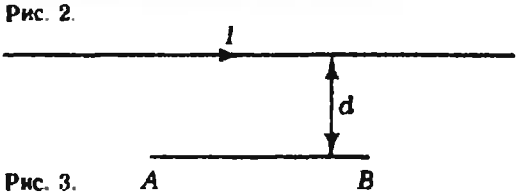


Рис. 3.

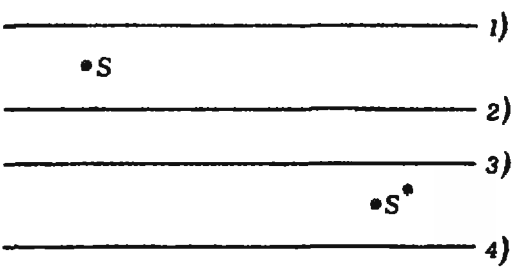


Рис. 4.

4. Посередине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки длины $L=1$ м находится столбик ртути длины $l=20$ см. Если трубку поставить вертикально, столбик ртути сместится на $x=10$ см. До какого давления была откачана трубка? Ответ выразить в атмосферах (1 атм соответствует 76 см рт. ст.).

5. Пластины плоского конденсатора присоединены к батарее, напряжение которой $U=600$ В. Пластины квадратные, площадью $S=100$ см^2 каждая; расстояние между пластинами $d=0,1$ мм. Какой величины ток будет протекать по проводам при параллельном смещении одной пластины относительно другой с постоянной скоростью $|\vec{v}|=6$ см/с?

6. Амперметр с внутренним сопротивлением $r_A=2$ Ом, подключенный к зажимам батареи, показывает ток $I=5$ А. Вольтметр с внутренним сопротивлением $r_B=150$ Ом, подключенный к зажимам той же батареи, показывает напряжение $U=12$ В. Найти ток короткого замыкания I_0.

7. Под горизонтальным прямолинейным проводом, по которому течет ток, на расстоянии d от провода помещен металлический стержень AB (рис. 3). Стержень отпускают, и он начинает свободно падать. Найти вид зависимости разности потенциалов U на концах стержня от расстояния R до провода.

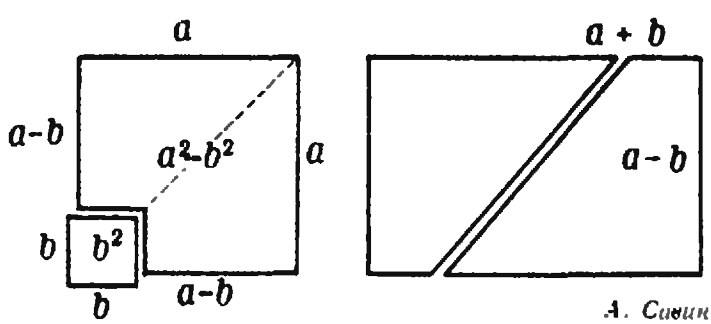
Указание. Считать известным, что ток, текущий по прямолинейному проводу, создает магнитное поле, индукция которого по модулю обратно пропорциональна расстоянию до провода и для точек в плоскости рисунка 3 направлена перпендикулярно этой плоскости.

8. Предмет находится на расстоянии $L=0,9$ м от экрана. Между предметом и экраном перемещают линзу. При одном положении линзы на экране получается увеличенное изображение предмета, а при другом — уменьшенное. Найти фокусное расстояние линзы, если известно, что линейные размеры первого изображения в 4 раза больше линейных размеров второго.

9. Найти построением положение центра, вершины и фокуса сферического зеркала для показанных на рисунке 4 четырех различных вариантов положений источника S, его изображения S^* и главной оптической оси зеркала.

А. Васильев, А. Пономаренко

Геометрическое доказательство тождества $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.



А. Савин

15 лет Челябинскому НОУ

Прошло 15 лет интересной плодотворной работы Челябинского научного общества учащихся. За это время десятки тысяч школьников нашли в нем свое призвание. Но самое главное — заповедью каждого стали слова: «Родине — наши мысли, таланты, дела!».

В настоящее время в обществе 68 секций и групп в институтах и 27 филиалов в школах города и области, в которых занимаются более 3,5 тысяч старшеклассников, увлеченных различными областями науки и интересующихся отраслями народного хозяйства, характерными для Южного Урала. Содержание, формы и методы работы общества способствуют тому, что его члены в своей поисковой деятельности не только овладевают новыми знаниями и умениями, но и принимают посильное участие в производительном труде.

Показательным для нашего НОУ является то, что бывшие члены НОУ, ныне специалисты, возвращаются в него в качестве руководителей секций. Среди них преподаватели педагогического института И. Жуков и Е. Жмаева, кандидат медицинских наук В. Циркин, аспирант кафедры математики политехнического института В. Кононов, учитель литературы школы № 1 г. Челябинска Л. Мельникова. А всего более 200 ученых и преподавателей вузов г. Челябинска учат ребят любить науку.

За 15 лет в обществе сложились свои традиции. Лучшая из них — связь исследований с жизнью, с потребностями производства. Так, работы секции физиологии «Состояние здоровья школьников в различные сезоны года», «Дневные и сезонные колебания пульса у людей разного возраста», «Кислородная емкость легких у юных конькобежцев», выполненные под руководством преподавателей кафедры физиологии ЧГМИ, имеют большое практическое значение для физиологии труда человека и спорта.

По заданию кафедры аналитической химии Челябинского политехнического института учащиеся под руководством старшего преподавателя ЧПИ Г. Т. Кирьяновой выполнили целый ряд анализов сплавов железа на содержание в них никеля, кобальта, хрома, марганца и других элементов. Ребята определили процентное содержание этих компонентов в сплавах, что помогло в проведении лабораторных занятий со студентами.

Автоконструкторская секция совместно с научными сотрудниками технологического автомобильно-транспортного сектора научно-исследовательского института открытых горных разработок выполнила работу по созданию действующей модели перспективного колесного тягача. «Одним из дальнейших этапов этой работы явилась разработка и создание действующих стендов-моделей для проведения лабораторных испытаний и проверки теоретических закономерностей бортового поворота колесных двигателей», — так оценил работу юных автоконструкторов генеральный конструктор ЧТЗ, доктор технических наук И. С. Кавьяров.

Членами НОУ освоена технология получения различных пигментов в школьных условиях, исследованы закономерности действия новых ингибиторов коррозии металлов, внедряемых в промышленность. Все это убедительно доказывает, что под руководством научных работников учащиеся могут проводить исследования на высоком научном уровне.

За страницами каждой работы виден кропотливый, не всегда интересный, но целеустремленный и упорный труд — труд, который приносит удовлетворение школьнику, создающему материальные и духовные ценности.

Творческая работа в НОУ способствует формированию устойчивых интересов ребят. Для большинства членов НОУ вопрос «Кем быть?» был решен сравнительно легко — более 90% избрали профессию, близкую к секции, в которой занимались. Примечательно и то, что члены НОУ, поступившие в институты, быстро находят дорогу в научные студенческие общества, а те, кто пошел работать на заводы и фабрики, вскоре становятся активистами ВОИР.

Работа в НОУ влияет и на развитие общественной активности школьников. На ежегодных учебных сборах в летнем лагере «Юный курчатовец» в г. Симе — на родине академика И. В. Курчатова — ребята не только отдыхают, но и обмениваются опытом работы, получают навыки пропагандистов технических и политических знаний. В результате более 100 инструкторов-общественников НОУ руководят кружками в младших классах, ведут большую пропагандистскую работу. В целом 73% членов НОУ постоянно занимаются общественной работой.

Девизом нашего общества ребята избрали слова: «Бороться, искать, находить и отстаивать!». И члены НОУ вот уже 15 лет настойчиво борются за претворение этих слов в жизнь.

Обозревая пройденный обществом путь, многотысячная армия школьников Челябинска мечтает многого добиться, держа равнение на слова замечательного советского писателя, любимца молодежи Николая Островского: «Только вперед!... И никуда иначе».

Т. Кузнецова,
зам. председателя Совета кураторов НОУ

Где ошибка?

Условие (5) в ы т е к а е т из условий (2), (3), но вовсе н е р а в н о с и л ь н о им. При первом способе мы ищем наибольшее значение выражения (1) при условиях (2), (3), при втором — при условии (5).

Между прочим, из (2) и (3), используя тождественное неравенство $t+\frac{1}{t}\geqslant 2$ на $]0;+\infty[$, легко вывести $c^2\leqslant 2$. Но $\max\limits_{]0;\sqrt{2}]} Q(c)=Q(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$.

Число — буква — число

x — девять, y — тысяча, z — тринадцать, u — один, v — сто.

Работа и мощность электрического тока

1. Лампочки одинаковой мощности соединяются параллельно, а полученные две цепочки включаются в сеть последовательно.

2. Точки A и B (см. рис. 5 в статье) должны лежать на одном диаметре.

3. $P_2=I_2((I_1-I_2)r+P_1/I_1)=4{,}5$ Вт; $\mathscr{E}=I_1r+P_1/I_1=5$ В.

4. При работе вхолостую мотор вращается быстро, ЭДС индукции велика. Следовательно, по обмотке мотора течет малый ток, и она нагревается незначительно. Наибольшее количество теплоты выделяется при полном затормаживании якоря, когда ток максимальный.

5. $$|\vec{v}_1|=\frac{\eta IU}{mg(\sin\alpha+k\cos\alpha)}=$$
$$=9{,}3\ \text{м/с}\approx 33{,}5\ \text{км/ч};$$
$$|\vec{v}_2|=\frac{\eta IU}{mg(k\cos\alpha-\sin\alpha)}=$$
$$=14\ \text{м/с}\approx 50\ \text{км/ч}.$$

6. $$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{(U^2+R(P_1+P_2))^2}{(U^2+RP_1)^2}\approx 1{,}3.$$

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

М а т е м а т и к а

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. $b>0$ и $a\in\left]-\sqrt[4]{\frac{128}{3}b};\ -\sqrt[4]{b}\right[\cup\left]\sqrt[4]{b};\ \sqrt[4]{\frac{128}{3}b}\right[$ или $b<0$ и a — любое действительное число. У к а з а н и е. Нарисуйте график функции $h(x)=f(x)-g(x)$ при $a>0$, $a<0$ и $a=0$. При $b>0$ и $a\neq 0$ этот график пересекает ось абсцисс в двух точках тогда и только тогда, когда $h(a)<0$ и $h\left(-\frac{a}{4}\right)>0$.

При $b>0$ и $a=0$ график не имеет с осью абсцисс общих точек. При $b=0$ он имеет с осью абсцисс одну (при $a=0$) или три (при $a\neq 0$) общие точки. При $b<0$ график при любом $a\in\mathbf{R}$ пересекает ось абсцисс в д в у х точках.

2. $$C_9^4(4C_6^3P_3+C_4^2C_6^2C_4^2P_2)+C_9^3(C_5^3P_3+$$
$$+5\cdot 3C_5^3P_2+C_5^2\cdot 3C_4^2P_2+5\cdot 3C_5^2C_3^2)=294\,840$$

чисел. У к а з а н и е. Либо среди цифр нет нуля, либо есть. В первом случае либо какая-то цифра стоит на трех местах, либо имеется два «дублета». Во втором случае одно из четырех: либо нуль занимает три места, либо какая-то другая цифра занимает три места, либо нуль занимает два места, либо, наконец, нуль занимает одно место и есть два «дублета».

3. При $a\in[0;4[$ $x=\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$, при остальных a $x_1=\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$, $x_2=$
$$=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a+2}{2(a-1)}+\pi l\ (l\in\mathbf{Z}).$$
У к а з а н и е. Исходное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases}[2(1-a)\cos 2x+2+a]\sin^2x=0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$$

4. $$\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\sqrt{-\cos\alpha}\right)}.$$

У к а з а н и е. Пусть $MABCD$ — данная пирамида (рис. 1), $[CP]\perp(MB)$ (тогда $[AP]\perp(MB)$ и $\widehat{CPA}=\alpha$), $[MN]\perp(ABC)$, $[MQ]\perp(AD)$, $\widehat{NMB}=\varphi$, $\widehat{QMN}=\beta$, O_1 — центр «искомой» сферы S (рис. 2), K — точка ее касания с гранью MDA, $L=S\cap(MO_1)$. Тогда $|O_1K|=|O_1L|$ — искомый радиус.

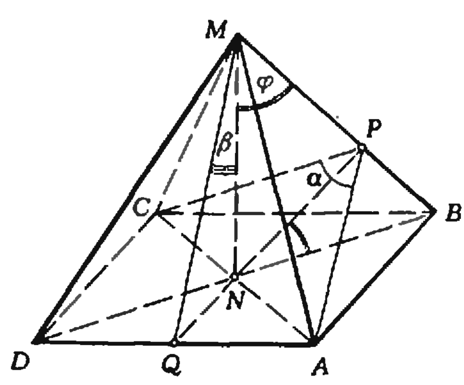


Рис. 1.

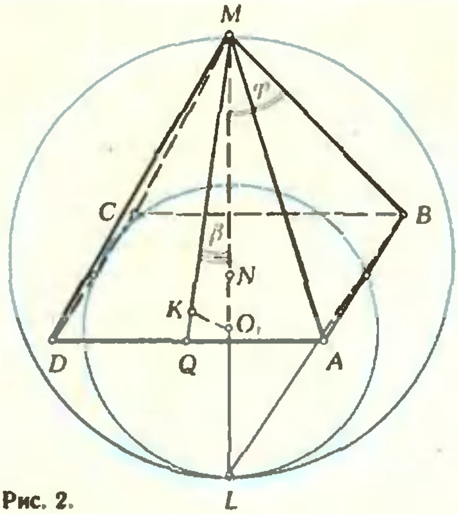


Рис. 2.

Поскольку $\widehat{NMB} = \widehat{PNB}$, из $\triangle PNB$ получаем $\cos\varphi = \frac{|NP|}{|NB|} = \frac{|NP|}{|NA|} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. (Отсюда, между прочим, вытекает, что $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.) Из $\triangle QMN$ находим $\operatorname{tg}\beta$, из $\triangle LMB$ — $|ML|$ и, наконец, из $\triangle O_1MK$ — $|O_1K|$.

5. $\vec{a} = (2; -2; -2)$.

Отделение экономической кибернетики и отделение планирования народного хозяйства экономического факультета, химический факультет и факультет психологии

1. $\frac{9}{4}$. 2. $1120x^4$. Указание. $1 + C_m^1\cdot(-2) + C_m^2\cdot(-2)^2 = 97$.

3. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\right\}$.

4. $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$. Указание. Введите систему координат с началом в вершине данной пирамиды и с осями «по ребрам». Далее см. задачу 14 в «Геометрии 10».

5. $b=0$, $a\neq0$ или $b\neq0$, $a\neq-2b$ или $-5<b<0$, $a=-2b$. Указание. Обе части неравенства разделить на 3^{-y}. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y<2x-1,\\ ax+by=5.\end{cases}$$

Географический и геологический факультеты и отделение политэкономии экономического факультета

1. Точка $x_0=1$ является точкой минимума функции f, точек максимума на отрезке $[0; 3]$ у нее нет. $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(3)=4\sqrt{6}$, $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(1)=0$.

2. $]-1; 1+2\sqrt{2}[$. Указание. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2\frac{2(x+1)^2}{(x+3)^2}<0,\\ x+1>0.\end{cases}$$

3. 5, 10, 20 и 20, 10, 5. 4. $x=\pi+2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$. 5. $\frac{9}{2}\pi a^3$.

Физика

1. $k_{\min}=1$.

2. $A=\frac{m|\vec{v}|^2}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right)=105$ Дж.

3. В проекциях на ось X скорости и координаты доски и бруска изменяются по формулам:

$$v_д = v-\frac{kmg}{M}t,\quad x_д = vt-\frac{kmg}{2M}t^2,$$

$$v_б = kgt,\quad x_б = \frac{kg}{2}t^2.$$

Брусок соскользнет с доски, если выполняется условие

$$L\leq\frac{Mv^2}{2kg(M+m)}.$$

4. $p=\frac{l}{l_0}\,\frac{(L-l+2x)(L-l-2x)}{4x(L-l)}\approx$ $\approx 0{,}49$ атм, где $l_0=76$ см. рт. ст.

5. $I=\frac{\varepsilon_0\sqrt{S}\,|\vec{v}|\,U}{d}\approx3{,}2\cdot10^{-7}$ А.

6. $I_0=\frac{IU(r_В-r_А)}{r_В(U-Ir_А)}=29{,}6$ А.

7. $U\sim\frac{\sqrt{R-d}}{R}$.

8. $F=\frac{2}{9}L=0{,}2$ м.

9. См. рис. 3.

Числовые ребусы

1. ИНДЕКСАТОР = 2509341867.

2. 1 283 496 750 : 1983 = 647 250.

3. $1^3+5^3+3^3=153$.

Почему плохо кричать против ветра?

(см. «Квант» № 2)

1. Скорость жука направлена вертикально вверх, следовательно, жук отклонится от цели на угол 30° (рис. 4).

2. Жук летит по параболе (рис. 5), которая описывается уравнением

$$x=\operatorname{ctg}\alpha\cdot h-\frac{b}{2|\vec{c}|\sin\alpha}h^2.$$

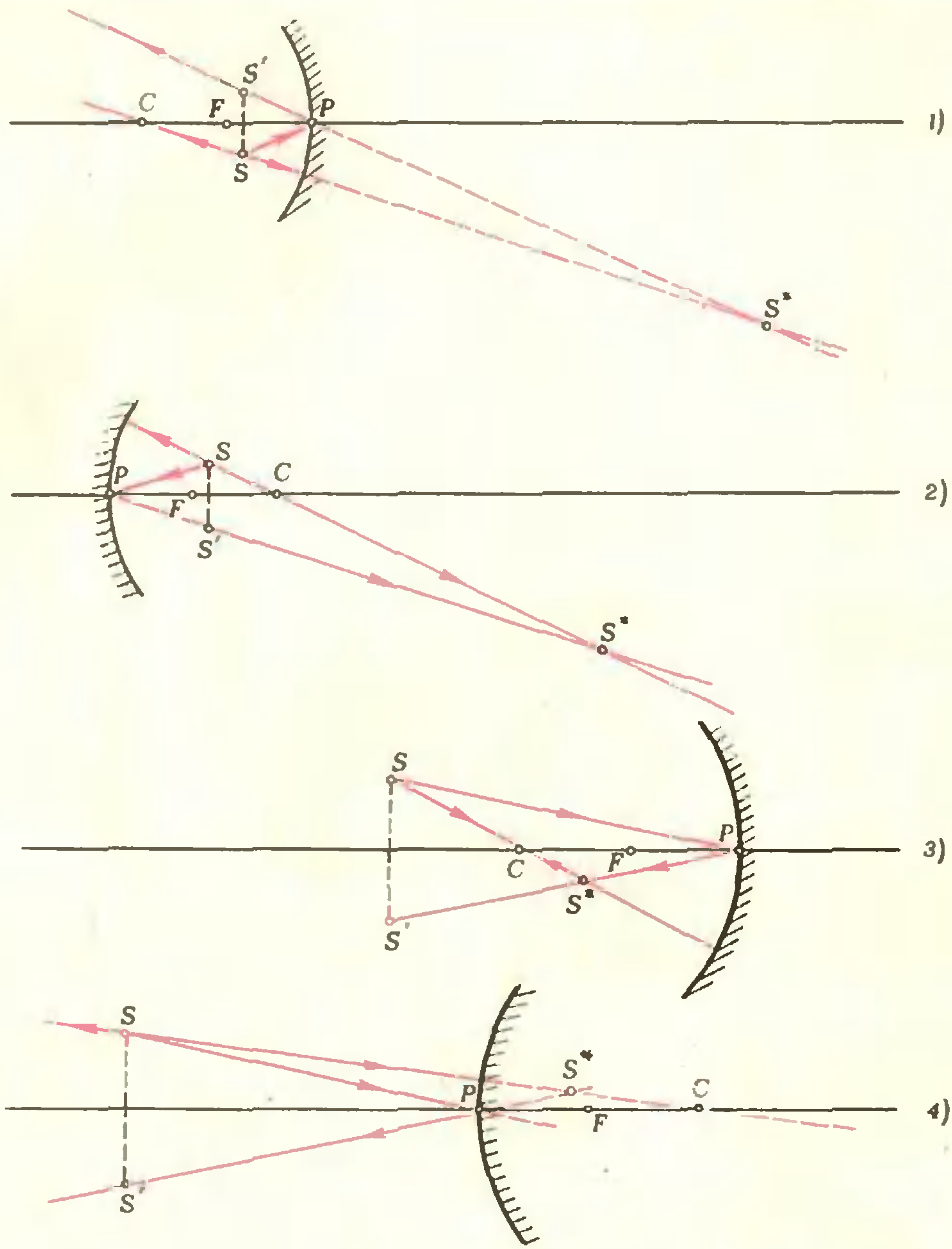


Рис. 3.

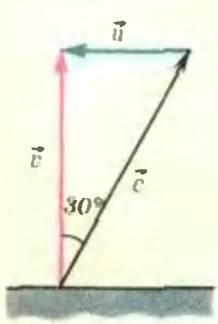


Рис. 4.

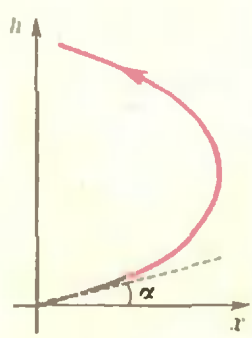


Рис. 5.

3. Фронт преломленной волны составляет с границей угол β такой, что

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{1 + |\vec{u}|\sin\alpha/|\vec{c}|}$$

Решение неравенств с модулем (*см. «Квант» № 2*)

1. $x \in]-\infty, -2-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{3}; +\infty[$.

2. $x \in]\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$.

3. а) $\{0,3\}$;

б) $]-3,1[$;

в) $]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[$.

4. а) $\left]-\infty,\frac{4-\sqrt{19}}{3}\right[\cup\left]\frac{4+\sqrt{19}}{3},+\infty\right[$;

б) $]-\infty,-5-\sqrt{13}]\cup[-2+\sqrt{2},+\infty[$;

в) $]-5,3+2\sqrt{2}[$.

5. а) При $-3\frac{1}{4}<a<3$.

б) При $-\frac{3}{4}<a<2$.

Московский физико-технический институт

(см. «Квант» № 2)

Математика

Вариант I

1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$. 2. $[7;+\infty[$.

3. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. Указание. Если O — точка пересечения медиан и $|OD|=a$, то $|AO|=2a$. Исходя из того, что отрезок BO является высотой в прямоугольном треугольнике ABD, выразите $|AB|$ и $|BD|$ через a. Можно также разложить векторы $\vec{AD}$ и $\vec{BE}$ по векторам $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$ и воспользоваться тем, что $\vec{AD}\cdot\vec{BE}=0$.

4. $x_1=\arccos\frac{3}{4}+2\pi k,\ y_1=-\arccos\frac{1}{8}+2\pi l;\ x_2=-\arccos\frac{3}{4}+2\pi k,\ y_2=\arccos\frac{1}{8}+2\pi l\ (k,l\in\mathbf{Z})$. Решение. Из первого уравнения системы $6\cos x=5-4\cos y$, из второго $6\sin x=-4\sin y$. Возводя в квадрат и складывая, получаем $\cos y=\frac{1}{8}$ или $y=\pm\arccos\frac{1}{8}+2\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$. Тогда из первого уравнения системы $\cos x=\frac{3}{4}$ или $x=\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi l\ (l\in\mathbf{Z})$. Поскольку мы возводили в квадрат, требуется проверка. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что из четырех комбинаций знаков годятся только те две, которые указаны в ответе.

5. 3 ч. 24 мин. Указание. Поскольку уменьшение скорости течения на

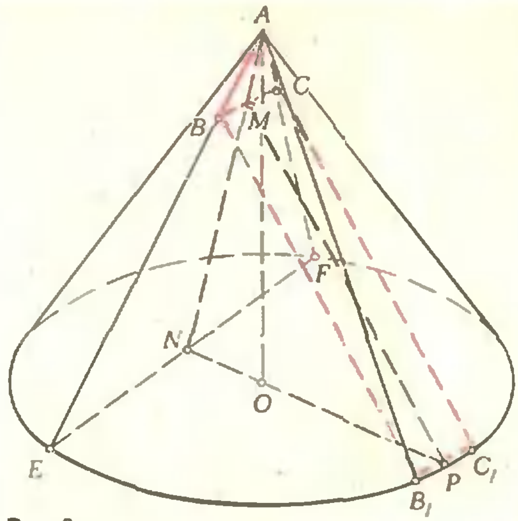


Рис. 6.

участке AB приводит к увеличению скорости катера относительно берега при движении от A к B, река течет от C к A. Обозначив расстояние между A и B через a, расстояние между B и C — через b, скорость катера относительно воды в первых двух рейсах — через u и скорость течения реки — через v, составьте систему из трех уравнений. Исключив a и b, выразите из полученного уравнения u через v.

6. $\frac{125}{18}\pi$. Решение. Пусть E и F — точки пересечения плоскости (ABC) с окружностью основания конуса (рис. 6). Поскольку $(BC)\parallel(B_1C_1)$, а прямая (B_1C_1) лежит в плоскости основания конуса, то $(BC)\parallel(EF)$. Значит, $\triangle AEF\sim\triangle ABC$, в частности, AEF — правильный треугольник. Образующие конуса имеют равные длины, поэтому $|AE|=|AB_1|$, откуда $|AE|:|AB|=5$. Пусть M, N и P — середины отрезков $[BC]$, $[EF]$ и $[B_1C_1]$ соответственно, O — центр основания конуса. Поскольку $(ON)\perp[EF]$, а $[EF]\parallel[B_1C_1]$, прямая (ON) проходит и через середину отрезка $[B_1C_1]$. Очевидно, отрезок $[AN]$ проходит через точку M и перпендикулярен $[EF]$. Отметим еще, что $(MP)\perp(AN)$, так как $(MP)\parallel(BB_1)$, а $(BB_1)\perp(ABC)$ и, в частности, $(BB_1)\perp(AN)$. Пусть $|AB|=a$, тогда

$$|AM|=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ |AE|=5a,\ |AN|=\frac{5\sqrt{3}}{2}a,\ |MN|=2\sqrt{3}a.$$

В прямоугольном треугольнике AB_1B находим $|BB_1|=\sqrt{24}a$. Далее в прямоугольном треугольнике PMN, учитывая, что $|PM|=|BB_1|$, находим $|PN|=6a$. Вычисляя двумя способами площадь треугольника ANP, в котором $[PM]$ и $[AO]$ — высоты, получаем $|AO|\cdot|NP|=|AN|\cdot|MP|$, откуда $|AO|=\frac{5}{\sqrt{2}}a$.

Теперь находим радиус основания конуса $R=|OB_1|=\sqrt{|AB_1|^2-|AO|^2}=\frac{5}{\sqrt{2}}a$, объем конуса $V_к=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot|AO|=\frac{125\pi}{6\sqrt{2}}a^3$, объем призмы $V_п=\frac{3}{\sqrt{2}}a^3$ и отношение $V_к:V_п=\frac{125}{18}\pi$.

Вариант 2

1. $]-\infty;\ -4[\cup]0;\ +\infty[$. 2. $n=4k+1$ ($k\in\mathbb{Z}$). Указание. Рассмотрите случаи $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$. 3. $n=6$, $x=\pm\frac{1}{2}$. 4. $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$. Указание. $\triangle CAD$ — равнобедренный, $\widehat{ADN}=\widehat{ACN}$. Выразите $|CM|$ и $|MN|$ через $|MD|$ и $\widehat{CDA}$.

5. 1) $\left[\frac{1}{2};\ \frac{34}{5}\right]$. 2) $[-4;\ 2]$. Решение. Уравнение прямой BD $y=-x-1$. Требуется найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2x-y-2a\leqslant 0, \\ 2x+6y+5a\leqslant 0, \\ y=-x-1, \\ -3\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$$

или система

$$\begin{cases} x\geqslant\frac{-6+5a}{4}, \\ x\leqslant\frac{2a-1}{3}, \\ -3\leqslant x\leqslant 3 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет решение. Чтобы система (1) имела решение, необходимо, чтобы a удовлетворяло неравенству $\frac{-6+5a}{4}\leqslant\frac{2a-1}{3}$, т. е. $a\leqslant 2$. Итак, система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} \frac{-6+5a}{4}\leqslant x\leqslant\frac{2a-1}{3}, \\ -3\leqslant x\leqslant 3, \\ a\leqslant 2. \end{cases} \qquad (2)$$

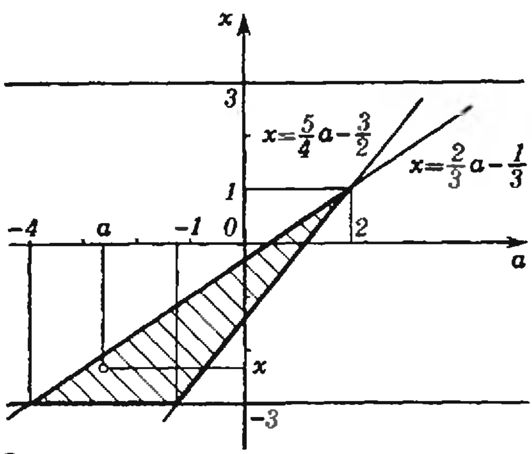


Рис. 7.

Чтобы отрезки $\left[\frac{-6+5a}{4};\ \frac{2a-1}{3}\right]$ и $[-3;\ 3]$ имели общие точки, необходимо и достаточно, чтобы левый конец каждого из них не превосходил правого конца другого отрезка, т. е. чтобы имела решение система

$$\begin{cases} \frac{-6+5a}{4}\leqslant 3 \\ -3\leqslant\frac{2a-1}{3}. \end{cases} \qquad (3)$$

Решив систему (3) и учтя условие $a\leqslant 2$, получаем ответ. Можно действовать и по-другому: «решив» систему (1) графически (рис. 7), видим, что $-4\leqslant a\leqslant 2$.

6. $\frac{\sqrt{29}}{3}a$. Решение. Положим $\vec{AD}=\vec{i}$, $\vec{AB}=\vec{j}$, $\vec{AA_1}=\vec{k}$. В силу коллинеарности векторов $\vec{AM}$ и $\vec{i}$, а также $\vec{A_1N}$ и $\vec{j}$ можем записать $\vec{AM}=x\vec{i}$, $\vec{A_1N}=y\vec{j}$. Отсюда $\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AA_1}+\vec{A_1N}=-x\vec{i}+y\vec{j}+\vec{k}$. Из условия $\vec{MN}\cdot\vec{QP}=0$, учитывая, что $\vec{QP}=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$, получаем $y=2x$.

Условие, что $[MN]$ и (QP) пересекаются, можно реализовать в виде уравнений различными способами. Например, так: если $[MN]$ и (QP) пересекаются, то точки M, N, P, Q лежат в одной плоскости; значит, вектор $\vec{MN}$ компланарен с векторами $\vec{QP}$ и $\vec{QM}$. Это означает, что существуют такие числа α и β, для которых

$$\vec{MN}=\alpha\vec{QP}+\beta\vec{QM}. \qquad (1)$$

Отсюда

$$-x\vec{i}+y\vec{j}+\vec{k}=(\alpha+\beta x)\vec{i}+\frac{\alpha-\beta}{2}\vec{j}-\frac{\beta}{2}\vec{k}.$$

В силу единственности разложения это векторное равенство равносильно трем скалярным

$$\begin{cases} -x=\alpha+\beta x, \\ y=\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ 1=-\frac{\beta}{2}. \end{cases}$$

Исключив из этих уравнений α и β, найдем $x=2y-2$. Отсюда и из $y=2x$ получаем

$x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. Значит,

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j} + \vec{k},$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + 1}\,a = \frac{\sqrt{29}}{3}a.$$

Заметим, что условие (1) является, вообще говоря, лишь необходимым для пересечения отрезка $[MN]$ и прямой (QP). Для того чтобы доказать, что при найденных положениях точек M и N пересечение имеет место, спроектируем $[MN]$ и (QP) на плоскость $ABCD$ (N_1 и Q_1 — проекции). Легко видеть, что M и N_1 лежат по разные стороны прямой (Q_1C), а потому отрезок $[MN_1]$ и прямая (Q_1C) пересекаются. Отсюда и из того, что точки M, N, P, Q лежат в одной плоскости, следует, что пересекаются $[MN]$ и (QP).

Физика

Вариант 1

1. $k \geqslant \frac{1}{\sin\alpha} > 1$.

2. $r = r_0(1 - l/p) = 0{,}72$.

3. В начальном положении поле над нижней пластиной равно полю Земли $E_З$, а под пластиной — равно нулю. Точно такая же картина имеет место для заряженной проводящей сферы. Следовательно, поверхностная плотность заряда на нижней пластине равна $\sigma_{пл} = \varepsilon_0 E_З$, а полный заряд пластины равен $Q_{пл} = \sigma_{пл}S = \varepsilon_0 E_З S$. Когда верхняя пластина закроет нижнюю, поле между верхней пластиной и Землей станет равным нулю, поэтому и заряд нижней пластины тоже станет равным нулю. Значит, через гальванометр протечет заряд $Q = Q_{пл} = \varepsilon_0 E_З S$, откуда искомая напряженность поля Земли

$$E_З = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = 200 \text{ В/м}.$$

4. $d_2 = \frac{d_0 d_1}{2d_1 - d_0} \approx 14$ м.

Указание. Тем, у кого возникнут затруднения при решении этой задачи, советуем прочитать статью А. Дозорова «Что это значит — «навести на резкость»?» («Квант», 1978, № 2).

Вариант 2

1. Если считать, что при двукратной перегрузке сила давления на опору $\vec{N}$ (а значит, и реакция опоры) равна по модулю $2mg$, то искомая высота (которая находится из уравнения движения и закона сохранения энергии) равна

$$h = \frac{2kl - R}{3} = \frac{8}{3} \text{ м}.$$

Если же перегрузкой считать величину $\vec{N} - m\vec{g}$, то $|\vec{N}| = 3mg$ и

$$h = \frac{2}{3}(kl - R) = \frac{4}{3} \text{ м}.$$

2. Предполагая, что масса пара $m_п$ мала, получим:

$$\frac{m_п}{m_в} = \frac{c\Delta t}{\lambda} = \frac{8}{539} \approx 0{,}015 = 1{,}5\%,$$

что, действительно, не противоречит предположению.

3. Вдоль магнитного поля электрон движется равномерно со скоростью $|\vec{v}|\cos\alpha$ и пролетает расстояние $|AБ| = L$ за время $\tau = L/(|\vec{v}|\cos\alpha)$. В плоскости, перпендикулярной магнитному полю, электрон движется по окружности радиуса R:

$$\frac{m(|\vec{v}|\sin\alpha)^2}{R} = e|\vec{B}|\,|\vec{v}|\sin\alpha.$$

Время одного оборота

$$T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|\sin\alpha} = \frac{2\pi m}{e|\vec{B}|}.$$

Из условия $\tau = nT$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, получаем:

$$|\vec{B}| = \frac{2\pi m|\vec{v}|\cos\alpha}{eL}n.$$

4. $\Gamma = 3$.

Вариант 3

1. $|\vec{F}_н| = \frac{1}{2}(k_2 - k_1)mg\cos\alpha \approx 0{,}13$ Н.

2. Так как вся выделяющаяся при распаде ядер энергия идет на нагревание микрокалориметра, закон сохранения энергии имеет вид: $C\Delta t = \frac{mN_0}{A}W\alpha$. Здесь $\alpha = \frac{n_0 - n}{n_0}$ — отношение числа распавшихся атомов к их первоначальному числу $n_0 = mN_0/A$. Отсюда найдем α:

$$\alpha = \frac{C\Delta tA}{mN_0W} \approx 0{,}3.$$

Закон радиоактивного распада можно представить в виде:

$$\frac{n_0}{n} = 2^{\frac{\tau}{T}}, \text{ или } \frac{n_0}{n} = \frac{1}{1-\alpha} = 2^{\frac{\tau}{T}}.$$

Так как $(1-\alpha)^{-1} \approx \sqrt{2}$, то

$$\frac{\tau}{T} \approx 0{,}5, \text{ и } T \approx 100 \text{ мин}.$$

3. $Q = C\mathscr{E}$.

4. $F = -9{,}6$ см (линза рассеивающая).

Вариант 4

1. $x = 8{,}5l - H/k = 1/3$ м (тело остановится не сразу, а лишь после четвертого соскальзывания с правой стенки ямы).

2. $t = \frac{\mu p V}{RTM} = 8{,}35\cdot 10^{-3}$ с.

3. Выделим участок поверхности шара единичной площади и найдем силу, действующую на выделенный участок. Напряженность электрического поля у поверхности шара снаружи равна $|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, а внутри — $|\vec{E}_{\text{вн}}| = 0$. Пусть $\vec{E}'$ — напряженность поля, создаваемого единичной поверхностью, а $\vec{E}''$ — напряженность поля, создаваемого всей остальной поверхностью, вблизи выделенного участка. Используя принцип суперпозиции, для поля над участком и под ним (внутри сферы) получим:

$$|\vec{E}'| + |\vec{E}''| = |\vec{E}|, \quad |\vec{E}'| - |\vec{E}''| = 0.$$

Отсюда находим напряженность поля, действующего на выделенный участок: $|\vec{E}''| = |\vec{E}|/2$. Тогда сила, действующая на единицу площади поверхности, равна

$$|\vec{F}| = |\vec{E}''|\frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}.$$

Направлена эта сила по радиусу от центра шара. Теперь запишем условие равновесия для половинки шара непосредственно перед разрывом:

$$|\vec{F}|\pi R^2 = 2\pi R\Delta R\sigma_{\text{пр}}.$$

Отсюда найдем величину заряда Q:

$$Q = 8\pi R\sqrt{\varepsilon_0 R\Delta R\sigma_{\text{пр}}} \approx 2\cdot 10^{-3}\text{Кл}.$$

4. $F = {}^3/_4 l = 9$ см.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2, с. 45)

1. Перепишем зашифрованный ребус в столбик:

$$\begin{array}{r} \text{ТАМТАМ} \\ +\ \text{МРАК} \\ \hline \text{КОШМАР} \end{array}$$

Нетрудно сообразить, что А=9, О=0, так что

М+К=Р+10,
К =Т+1,

и либо Т+Р+1=М, либо Т+Р+1=М+10.

Пусть сначала Т+Р+1=М. В этом случае Т=4, К=5, так что

$$\begin{cases} М+5=Р+10, \\ Р+5=М. \end{cases}$$

Учитывая, что $1\leqslant Р\leqslant 9$, $1\leqslant М\leqslant 9$, получаем три возможности для Р и М: Р=1, 2, 3 и, соответственно, $1\leqslant М\leqslant 9$.

При Р=1 и Р=3 получаем две расшифровки:

$$\begin{array}{r} 496\,496 \\ +\ 6\,195 \\ \hline 502\,691 \end{array} \quad\text{и}\quad \begin{array}{r} 498\,498 \\ +\ 8\,395 \\ \hline 506\,893 \end{array},$$

а при Р=2 получаем Ш=4=Т, что невозможно.

Для случая, когда Т+Р+1=М+10, получаем Т=9=А, что также не годится.

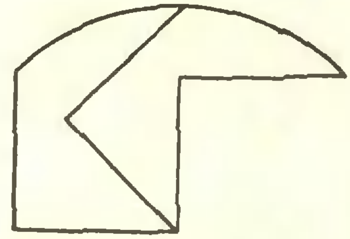


Рис. 8.

Итак, существуют ровно две различные расшифровки ребуса. В условии говорится, что знатоков было несколько — значит, их двое!

3. См. рисунок 8.

4. Перевернем стаканы шесть раз, каждый раз оставляя неперевернутым новый стакан. Тогда каждый стакан окажется перевернутым пять раз, то есть все стаканы будут поставлены вверх дном.

5. Точки, стоящие на одной вертикали, нельзя красить все в один цвет (иначе можно будет построить несколько прямоугольников с одноцветными вершинами). Поэтому на каждой вертикали должны быть точки обоих цветов. Очевидно, что если найдутся две вертикали с одинаковым расположением одноцветных точек, то найдется и прямоугольник с одноцветными вершинами. Из трех разноцветных точек, стоящих на одной вертикали, две точки обязательно одинакового цвета. Две же одноцветные точки вертикали могут занимать только три разных положения (см.

Рис. 9.

рисунок 9: красные точки на второй, третьей и четвертой вертикалях). Так как у нас имеются два цвета, то «разных» вертикалей может быть только шесть. Следовательно, среди имеющихся семи вертикалей по крайней мере две будут с одинаковым расположением одноцветных точек.

...и фокус не удался

(см. «Квант» № 2, с. 47)

Обозначим через $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1 a_0}$ десятичную запись натурального числа, у которого a_0 единиц, a_1 десятков, a_2 сотен,...

Имеем:

$$\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1 a_0} = 10^n\cdot a_n + 10^{n-1}\cdot a_{n-1} + \ldots + 10^2\cdot a_2 + 10\cdot a_1 + a_0 = 9\Big(\underbrace{11\ldots 11}_{n}\times a_n + \underbrace{11\ldots 11}_{n-1}\cdot a_{n-1} + \ldots + 11\cdot a_2 + a_1\Big) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0).$$

Отсюда видно, что остаток от деления числа на девять равен остатку от деления суммы его цифр. Поэтому исходное число и число, полученное из него перестановкой цифр, при делении на 9 дают одинаковые остатки. Значит, их разность делится на девять. *Это верно и для суммы* цифр разности. Теперь понятно, как узнать зачеркнутую цифру, если сумма незачеркнутых цифр разности не делится на 9. В случае же, когда сумма незачеркнутых цифр разности делится на 9, зачеркнутая цифра может быть как нулем, так и девяткой. Поэтому в таком случае нужно задать еще один вопрос, например: «Вы зачеркнули 0?» Если ответ отрицательный, то зачеркнута девятка.

Числовые ребусы

(см. «Квант» № 2, с. 44)

1. 96787×21817.
2. ДВА=459.
3. 142068:3=47356.

Итак, одна сажень равна трем аршинам.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 1, с. 44)

1. Около 10 дней. 2. См. рис. 10.

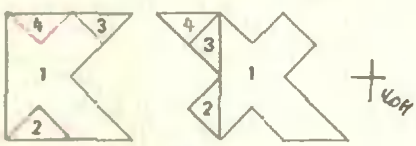


Рис. 10.

Головоломки наших читателей

(см. «Квант» № 1, с. 64)

1. Наименьшее число равно 488, наибольшее — 500. Один из возможных способов расстановки этих чисел показан на рисунке 11.

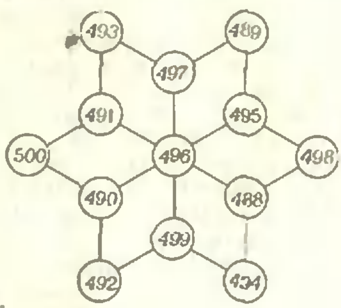


Рис. 11.

2. Наименьшее расставляемое число равно 11, наибольшее — 19; способ расстановки *чисел показан на рисунке* 12.

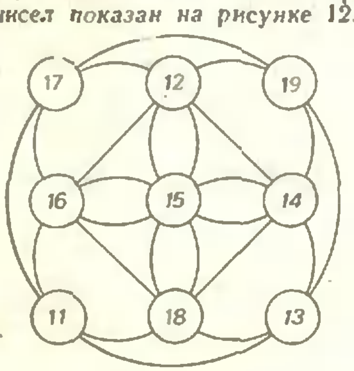


Рис. 12.

«Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 1, с. 41)

1. Задача имеет $6^4=1296$ решений, которые могут быть получены из шести решений, изображенных на рисунке 13 путем перестановок цифр в кружках одного цвета.

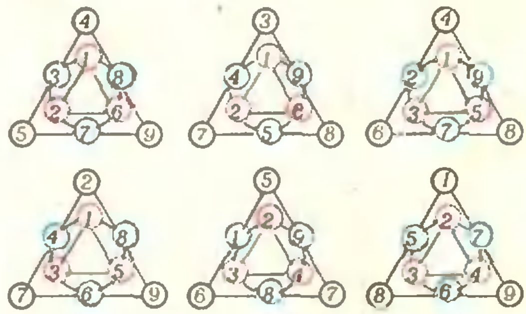


Рис. 13.

2. Пусть *а, б, в, г* — число бутылок, *выпитых*, соответственно, миссис Адамс, Браун, Вильсон и Грин. Тогда

$$\begin{cases} а+б+в+г=14, \\ а+2б+3в+4г=35. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение системы из второго, получим:
$б+2в+3г=21$, откуда следует, что $б+3г$ — нечетное число. Учитывая это замечание, нетрудно найти, что $а=4$, $б=2$, $в=5$, $г=3$. Таким образом, фамилия Сессиль—Адамс, фамилия Анны—Браун, Доротти—Вильсон и Бетти—Грин.

3. Указание. Выпишите все возможные в языке племени женские имена.

4. $11^3=1331$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, С. Лухин, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова, Е. Тенчурина, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры О. Бутусова, Н. Дорохова

113035, Москва М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 28/XII-78 г.
Подписано в печать 9/II-79 г.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,3 Т-05322
Цена 30 коп. Заказ 3001 Тираж 285 742 экз.

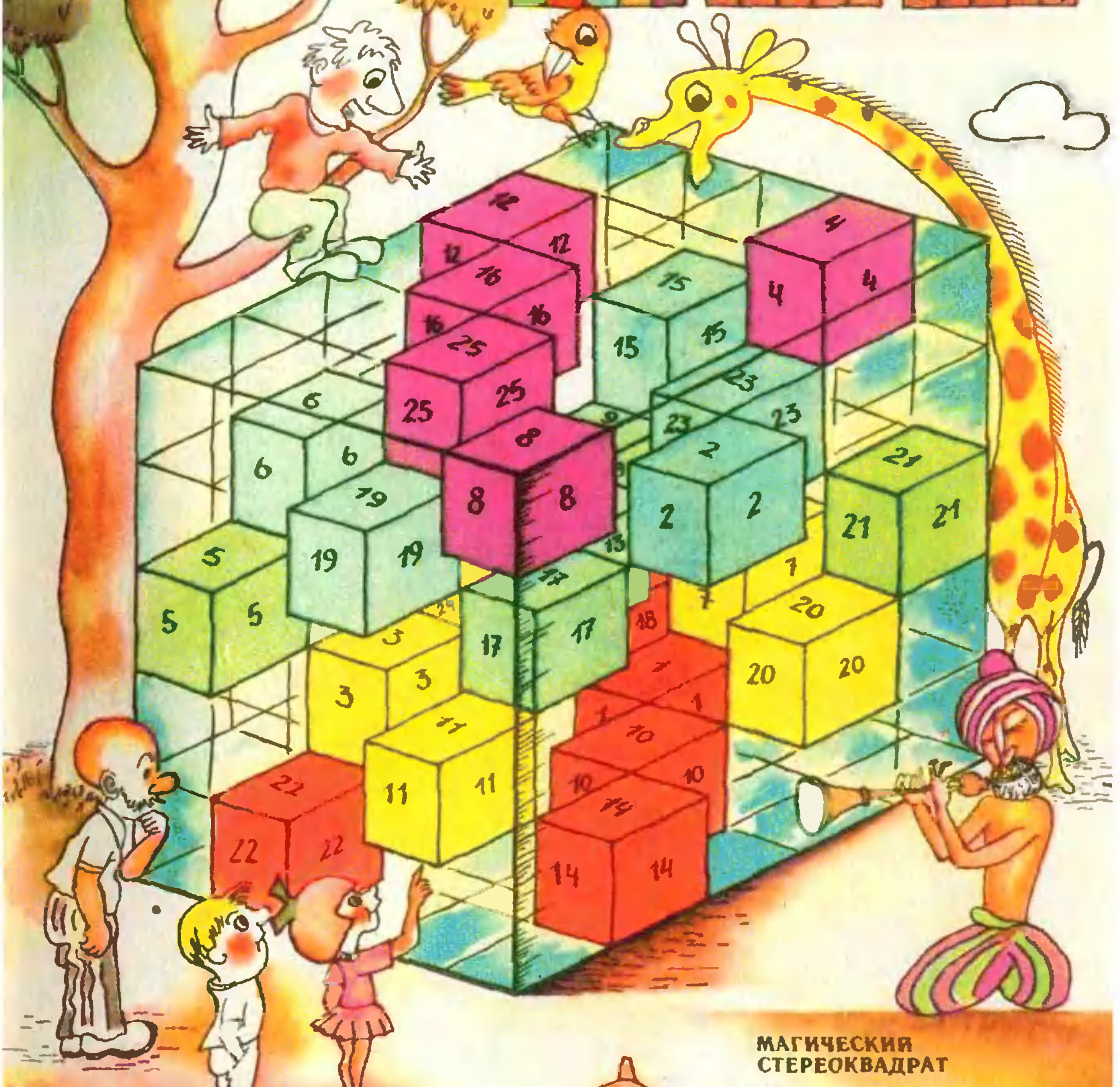
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

18	15	7	4	21
12	9	1	23	20
24	16	13	10	2
6	3	25	17	14
5	22	19	11	8

8	25	16	12	4
19	6	2	23	15
5	17	13	9	21
11	3	24	20	7
22	14	10	1	18

12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
5	9	13	17	21
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14



			4	
12				
	16			
		25		
				8

	15			
			23	
				2
6				
		19		

				21
	9			
		13		
			17	
5				

		7		
				20
24				
	3			
			11	

18				
		1		
			10	
				14
	22			

МАГИЧЕСКИЙ СТЕРЕОКВАДРАТ

Куб разбит на 125 маленьких кубиков, 25 из которых помечены числами от 1 до 25. Внизу показано, каким образом отмеченные кубики располагаются в каждом из пяти горизонтальных слоев куба. Если теперь на куб посмотреть сверху, потом спереди, а затем сбоку, то мы увидим целиком заполненные квадраты 5×5 (см. рисунок наверху), каждый из которых является магическим, т. е. сумма чисел в каждом горизонтальном ряду, каждом вертикальном ряду и по диагонали каждого такого квадрата одна и та же.

Е. Кривошеев

Индекс 70465

Цена 30 коп.

На этом рисунке наш художник изобразил «магические окружности» американского естествоиспытателя Б. Франклина (1706—1790). Из 64 чисел, расположенных на них, по крайней мере 28 способами естественно выделяются восьмерки чисел, сумма которых равна 348. Это — восьмерки чисел, лежащие в восьми концентрических кольцах, восьмерки чисел, лежащие в восьми секторах восьмерки чисел, лежащие в трех розовых эксцентрических кольцах, в трех голубых эксцентрических кольцах, в трех желтых и трех зеленых. Поищите другие интересные свойства этой конфигурации.